В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ

по

Алгебре и началам анализа

к УМК А.Н. Колмогорова

11 КЛАСС

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

к УМК

А.Н. Колмогорова и др.
(М.: Просвещение)

11 класс

МОСКВА • «ВАКО» • 2009

УДК 337:167.1:51
ББК 74.262.21
Р87

Авторы:
А.Н. Рурукин, Е.В. Бровкова, Г.В. Лупенко, Т.А. Пыжова

Рурукин А.Н., Бровкова Е.В., Лупенко Г.В. и др.
Р87 Поурочные разработки по алгебре и началам анализа: 11 класс. – М.: ВАКО, 2009. – 336 с. – (В помощь школьному учителю).

ISBN 978-5-94665-902-4

Издание представляет собой подробные поурочные разработки по алгебре и началам анализа для 11 класса к УМК А.Н. Колмогорова и др. (М.: Просвещение) и содержит все, что необходимо педагогу для качественной подготовки к урокам: подробные поурочные планы, методические советы и рекомендации, творческие задания, тесты, подробный разбор контрольных и зачетных работ. Предлагаемый материал достаточен для проведения полноценных уроков в классах и группах различного уровня, позволяет не только глубоко изучить программу 11 класса по предмету, но и целенаправленно подготовить учащихся к сдаче экзаменов.

Пособие будет полезно как начинающим педагогам, так и преподавателям со стажем.

УДК 337:167.1:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-94665-902-4

Предисловие

В 11 классе школьники продолжают изучать **новый раздел математики** – **начала математического анализа**. Этот раздел характеризуется **своеобразными логикой, подходами, методикой**. Поэтому очень важно сразу заложить **грамотное понимание** основ высшей математики. Помимо подготовки к экзамену такое понимание будет способствовать усвоению высшей математики в вузе. Также в этом классе продолжается изучение алгебры – детально рассматриваются функции, уравнения и неравенства. Такой материал крайне необходим при изучении точных наук в вузе.

11 класс необходимо рассматривать как **целенаправленную подготовку к сдаче ЕГЭ**, так как варианты этого экзамена содержат значительное количество задач, содержащих изучаемый материал.

Поэтому данное пособие преследует три цели: **изучить материал** по алгебре и началам анализа для 11 класса, **подготовиться** по этим разделам **к** успешной **сдаче ЕГЭ** и быть готовым **использовать** полученные знания **при обучении в вузе**. Пособие составлено для учебника А.Н. Колмогорова, А.М. Абрамова и др. (М.: Просвещение). Нумерация задач в поурочном планировании дана для этого учебника.

В пособии подробно рассмотрено содержание каждого урока. Несколько **расширен** изучаемый **материал**: более детально изучены способы интегрирования функций и применения интегралов в математике и физике; рассмотрены дополнительные типы показательных и логарифмических уравнений и неравенств, построение более сложных графиков функций.

Такое расширение материала вполне **доступно** для одиннадцатиклассников, **развивает** их **интерес** к изучению предмета и дает более **цельное представление** об изучаемых темах. Кроме того, приведенные дополнения подготавливают школьников к успешной сдаче ЕГЭ и дальнейшему эффективному обучению в вузе.

Предусмотрены **два вида фронтального контроля** успеваемости: контрольные работы и зачетные работы.

Контрольные работы имеют три степени сложности. Выбор степени сложности определяется учителем или учеником. При этом за решение более сложной контрольной работы ученик **поощряется дополнительным баллом** к оценке. В контрольной работе всегда на одну задачу больше, чем необходимо для получения высшей оценки. Наличие лишней задачи подразумевает некоторую свободу выбора у учащихся. В пособии приведены семь контрольных работ.

Зачетные работы приведены для **коррекции результатов контрольных работ**. Задачи работы разбиты на три блока по степени сложности и оцениваются разным количеством баллов. Необходимое для получения оценки количество задач может быть набрано из разных блоков. Даже для получения высшей оценки необходимо решить не более половины задач варианта. Поэтому у учащихся имеется значительная свобода выбора в решении задач. Между контрольной и зачетной работами предусмотрено несколько уроков для коррекции знаний учащихся. Приведены две зачетные работы по темам.

В конце обучения проводится **итоговая** контрольная **работа**, в которой проверяются навыки и умения учащихся по основным (базовым) темам.

Все контрольные и зачетные работы приведены с полным разбором всех задач всех вариантов. Этот разбор предусмотрен для размещения решений на стенде, так как разобрать все задачи на уроке невозможно, да и нецелесообразно.

Математические диктанты в пособии не предусмотрены, так как, на наш взгляд, малоэффективны при обучении, но отнимают значительное время от уроков.

В целом пособие составлено таким образом, чтобы оптимизировать подготовку учителя к уроку и сэкономить его время.

Рекомендации к проведению уроков

Весь изложенный материал носит **исключительно рекомендательный характер**. Определяющими факторами являются **подготовленность класса**, его **работоспособность**, **интерес к изучению** алгебры. Поэтому ни одно планирование не может быть **догмой**. Весь ход урока должен **способствовать обучению школьников**. На наш взгляд, лучше пусть каждый отдельный школьник хорошо **усвоит** тот **материал**, который **в состоянии понять, чем не поймет ничего**. В последнем случае ситуация принимает лавинообразный характер: у учащихся возникает **комплекс неполноценности**, к выполнению домашнего задания **привлекаются все домочадцы**, **возникают списывание, подсказки, шпаргалки** и т. д. В итоге **результаты ужасающие** – ЕГЭ по математике сдается школьниками хуже всех других предметов (примерно 20% выпускников пишут его на двойку).

Другая причина, по которой нельзя создать универсальное пособие, – наличие **нескольких** различных **вариантов обучения** (с соответствующим тематическим планированием и различным количеством часов на обучение). При этом некоторые варианты обучения предусматривают **использование дополнительных учебных пособий**.

В связи с этим данное пособие позволяет проводить занятия с использованием только **одного базового учебника** (102 часа в год). **Содержание** уроков является **избыточным** (в расчете на очень сильный, подготовленный класс). При необходимости часть материала опускается либо излагается поверхностно. При подробном, детальном изложении материала его вполне хватает на максимальный вариант (136 часов в год). Учитывая сложность материала, проведение контрольных работ и тематических зачетов желательно иметь в расписании **сдвоенные уроки** математики.

Поурочное планирование включает в себя **четыре вида занятий**:

1. Урок на изучение нового материала.
2. Урок на отработку и закрепление пройденного материала.
3. Контрольная работа.
4. Тематический зачет.

Рассмотрим эти виды занятий.

1. **Урок на изучение нового материала** включает в себя семь этапов.

I. **Сообщение темы и цели занятий** делает учитель (~1–2 минуты). Необходимо донести до учащихся **необходимость** изучения данной темы (**области применения** этих знаний) и **цель** урока (**на-**

выки и приемы, которые должны быть усвоены в ходе проведения урока).

II. **Изучение нового материала (основные понятия)** (~15 минут) возможно двумя путями.

1. С помощью подсказок, примеров и наводящих вопросов учителя **школьники самостоятельно** (при фронтальной работе) приходят к **формулировке основных понятий и правил** рассматриваемого раздела алгебры. Затем **учитель уточняет и корректирует** эти результаты. Однако, учитывая, что многие понятия для учащихся незнакомы, такой путь можно рекомендовать **лишь для** самых **простых тем** либо отдельных **фрагментов урока**.

2. **Учитель формулирует** основные понятия и правила, иллюстрируя их примерами. Такой подход требует меньше времени, но менее эффективен (всегда полезнее самостоятельно решить задачу, чем услышать объяснение ее решения).

III. **Контрольные вопросы** по изучаемому материалу **задает учитель** для проверки усвоения и понимания возникающих понятий, терминов и т. д. (~5 минут). Вопросы могут задаваться как **индивидуально**, так и **фронтально**. Следует обратить внимание именно **на понимание** понятий, а не на их механическое запоминание. Для этого рекомендуется **кроме определения** попросить учащегося привести **соответствующие примеры**. В случае затруднения такие примеры могут привести **другие школьники или учитель**.

IV. **Задание на уроке** дает учитель из **числа** наиболее **характерных, типовых задач** (~15 минут). Задание может выполняться:

1. **Самостоятельно учащимися всего класса в тетрадях** с последующим разбором кем-то из школьников (например, первым выполнившим задание) у доски. При этом желательна активная **работа всех учащихся: поиск ошибок** в решении на доске, **вопросы** по решению, **другие способы** решения и т. д.

2. **В виде диалога учащихся** на одной парте: решение задания, обмен тетрадями и взаимная проверка решения.

3. **В виде работы у доски** одного или нескольких школьников. После выполнения задания возможен как взаимоконтроль учащихся у доски, так и подключение к проверке решения всего класса. Разумеется, при этом будет происходить и **диалог учителя с отвечающим у доски**.

V. **Задание на дом** дается учителем из числа типовых, характерных задач, **аналогичных рассмотренным в классе**. Задание должно быть рассчитано на 60–80 минут. Если возможно, то желательно, чтобы учащимися были рассмотрены **разные способы решения за-**

дачи. Это приводит **к активизации мышления** школьников, **творческому пониманию** материала и т. д.

При выполнении домашнего задания необходимо приучить школьников **фиксировать непонятный материал**: теоретические сведения, нерешенные задачи и т. д. Полезно научить школьников **формулировать, что** именно им **непонятно.** Четко сформулированный вопрос – это половина ответа на этот вопрос. Особенно такие навыки понадобятся учащимся при обучении в вузе. Разумеется, все возникающие вопросы и нерешенные задачи необходимо **разобрать на ближайшем занятии** по математике.

VI. Во многих уроках предусмотрены **творческие задания.** Эти задания отличаются от приводимых в учебнике или **большей сложностью,** или нестандартностью формулировки задания, или **новым способом решения.** Поэтому рассмотрение подобных заданий очень полезно. В зависимости от подготовленности класса эти задания могут быть рассмотрены:

1) **на внеклассных занятиях** (дополнительные занятия, кружки, факультативы и т. д.);

2) **со всеми учащимися** как в качестве задания в классе, так и в качестве домашнего задания;

3) дифференцированно **с наиболее подготовленными** школьниками на уроке или в виде домашнего задания;

4) **во время** проведения **математических боев, олимпиад, недель математики** и т. д.

Творческие задания выполняются в пределах отведенного времени на урок.

VII. **Подведение итогов урока** (~1–2 минуты) проводится учителем с учетом самостоятельной работы школьников, ответов у доски, отдельных дополнений, вопросов, комментариев учащихся. За все эти виды деятельности **выставляются оценки с их** кратким **обоснованием.**

2. **Урок на отработку и закрепление пройденного материала** отличается этапом II. Теперь на этом этапе предусмотрено **повторение и закрепление пройденного материала** (~20 минут). Прежде всего оно включает **ответы на вопросы по домашнему заданию.** Желательно, чтобы такие ответы давались самими **учащимися.** Вопросы могут включать в себя непонятые понятия, определения, термины и другой теоретический материал. По-видимому, возникнет и необходимость **разбора нерешенных задач.**

В этой части урока желательна **максимальная активность** всего класса. Школьник, **объясняя и комментируя** свое решение задачи, **лучше усваивает** изучаемый материал. Кроме того, его **объясне-**

ния могут оказаться более удобными для понимания ровесниками, чем объяснения учителя. Ориентировочное время на такую стадию этапа II ~ 5–10 минут.

На второй стадии этого этапа предусмотрен **контроль усвоения материала** (письменный опрос или самостоятельная работа), на который отводится ~ 10–15 минут.

Письменный опрос содержит теоретический вопрос и 1–2 задачи, аналогичные заданию в классе и домашнему заданию. При проверке ответа на теоретический вопрос следует в первую очередь обращать внимание **на его понимание**, а не на строгость и четкость формулировок (тем более что строгие формулировки некоторых понятий будут даны только в вузе).

Самостоятельная работа включает 2–3 типовые, характерные задачи.

В материалах уроков **тесты используются в небольшом количестве** для наиболее простых тем. Это связано с тем, что тестирование **не позволяет** выявить **причину ошибки**: непонимание темы, невнимательность, пробелы в предыдущем материале, арифметические ошибки и т. д.

3. По каждой изучаемой теме приводятся несколько **контрольных работ**. Они составлены **в шести вариантах различной сложности** (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее, 5, 6 – самые сложные). Каждый вариант содержит **шесть задач**, из которых **две последние** чуть **сложнее предыдущих**. Как правило, **задачи** вариантов **подобны** задачам, **решаемым в классе и дома**. Выбор вариантов может быть сделан или **самими учащимися** (с учетом их самооценки), или **учителем** (с учетом успехов школьника).

Оценка контрольной работы может быть выполнена следующим образом: в вариантах 1, 2 за любые пять решенных задач ставится оценка «5», за четыре задачи – оценка «4», за три задачи – оценка «3». **Шестая задача** даст учащимся некоторую **свободу выбора и определенный резерв**. При таких же критериях за решение заданий вариантов 3, 4 добавляется 0,5 балла; заданий вариантов 5, 6 – добавляется 1,0 балла (учитывая большую сложность их заданий).

Контрольная работа рассчитана **на два урока** (на наш взгляд, это **оптимальное время** на написание работы). Изучаемый в 11 классе материал достаточно сложен. Предлагаемые задачи требуют раздумья и времени. Поэтому **одного урока** на проведение контрольной работы **недостаточно**. При необходимости за счет уменьшения количества задач или за счет некоторого либерализма при проверке контрольная работа может быть проведена и за один урок.

После каждой контрольной работы проводится ее **анализ и разбор** наиболее сложных **задач**. Ко всем заданиям вариантов 1–4 приведены ответы, задания вариантов 5, 6 разобраны. Полезно после контрольной работы **вывешивать** на стенде в классе **разбор заданий всех вариантов**. Заметим, что за счет дифференциации самих вариантов и заданий в них возможна **некоторая необъективность оценок** за контрольную работу.

4. Чтобы **устранить** подобную **необъективность**, дать возможность учащимся **повысить оценки**, а также еще раз **повторить и закрепить** пройденную тему, на последнем занятии проводится письменный **тематический зачет**. Ему предшествует **урок на повторение** данной темы.

Тематический зачет составлен в двух равноценных вариантах. Задания каждого варианта разделяются по сложности на три блока (блок A – самые простые задачи, блок B – более сложные и блок C – самые сложные задачи). Каждая задача из блока A оценивается в 1 балл, из блока B – в 2 балла, из блока C – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока A можно получить 7 баллов, блока B – 8 баллов и блока C – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Тематическое планирование учебного материала

III. Первообразная и интеграл (25 ч)

§ 7. Первообразная (10 ч)

Определение первообразной (2 ч)
Основное свойство первообразной (2 ч)
Три правила нахождения первообразной (4 ч)
Контрольная работа № 1 (2 ч)

§ 8. Интеграл (15 ч)

Площадь криволинейной трапеции (3 ч)
Интеграл. Формула Ньютона – Лейбница (4 ч)
Применение интеграла (6 ч)
Контрольная работа № 2 (2 ч)

IV. Показательная и логарифмическая функции (42 ч)

§ 9. Обобщение понятия степени (11 ч)

Корень *n*-й степени и его свойства (3 ч)
Иррациональные уравнения и неравенства (4 ч)
Степень с рациональным показателем (2 ч)
Контрольная работа № 3 (2 ч)

§ 10. Показательная и логарифмическая функции (20 ч)

Показательная функция (1 ч)
Решение показательных уравнений и неравенств (6 ч)
Логарифмы и их свойства (3 ч)
Логарифмическая функция (1 ч)
Решение логарифмических уравнений и неравенств (6 ч)
Понятие об обратной функции (1 ч)
Контрольная работа № 4 (2 ч)

§ 11. Производная и первообразная показательной и логарифмической функций (11 ч)

Производная показательной функции (2 ч)
Первообразная показательной функции (3 ч)
Производная логарифмической функции (1 ч)
Первообразная функции $y = \frac{1}{x}$ (1 ч)
Степенная функция (1 ч)
Понятие о дифференциальных уравнениях (1 ч)
Контрольная работа № 5 (2 ч)

V. Задачи на повторение (35 ч)
§ 1. Действительные числа
§ 2. Тождественные преобразования
§ 3. Функции
§ 4. Уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств
§ 5. Производная, первообразная, интеграл и их применения

Контрольная работа № 6 (2 ч)
Пробный экзамен (вариант ЕГЭ) (4 ч)

Глава III
Первообразная и интеграл

§ 7. Первообразная

Уроки 1–2. Определение первообразной

Цель: рассмотреть понятие первообразной функции и связь между первообразной и производными функциями.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Изучение нового материала

Как известно из курса 10 класса, понятие производной в механике было связано с нахождением мгновенной скорости и ускорения по известному закону изменения перемещения от времени $S(t)$. Например, для равноускоренного движения зависимость $S(t)=S_0+V_0t+\frac{at^2}{2}$, где S_0 и V_0 – начальное перемещение и скорость тела, соответственно (т. е. перемещение и скорость в момент времени $t=0$), a – ускорение. Найдя **производную от зависимости** $S(t)$, получим закон изменения **мгновенной скорости** от времени: $V(t)=S'(t)=V_0+at$. Вычислив **производную от величины** $V(t)$ (или вторую производную от функции $S(t)$), найдем закон изменения **ускорения** от времени: $a(t)=V'(t)=S''(t)=a$. В данном случае ускорение оказалось постоянным (не зависящим от времени). Поэтому такое движение называется равноускоренным, т. е. происходящим с одинаковым (равным) ускорением. Таким образом, операция **дифференцирования** (нахождения производной) **по закону перемещения** позволяет **находить скорость и ускорение тела.**

В механике очень часто возникает **обратная задача:** по известному **закону** изменения **ускорения** от времени $a(t)$ **найти поведение скорости** $V(t)$ и **перемещения** $S(t)$. Иными словами, по заданной **производной** $V'(t)$ (равной ускорению $a(t)$) надо **восстановить саму функцию** $V(t)$. Затем по известной **производной** $S'(t)$ (равной скорости $V(t)$) надо **найти функцию** $S(t)$.

Для решения подобных задач (**восстановление функции по ее известной производной**) служит операция **интегрирования, обратная** операции **дифференцирования**. Цель этой главы – постепенно познакомить учащихся с интегрированием функций. Для этого придется вводить ряд необходимых понятий.

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка выполнено равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример 1

Функция $F(x)=x^5$ является первообразной для функции $f(x)=5x^4$ на промежутке $(-\infty;\ \infty)$, так как для всех x из этого интервала выполнено равенство $F'(x)=(x^5)'=5x^4=f(x)$.

Замстим, что функция $\overline{F}(x)=x^5+\sqrt{3}$, например, также является первообразной для функции $f(x)=5x^4$ на R, так как $\overline{F}'(x)=(x^5+\sqrt{3})'=(x^5)'+(\sqrt{3})'=5x^4=F'(x)=f(x)$. Очевидно, что если вместо числа $\sqrt{3}$ поставить любую постоянную величину, результат от этого не изменится. Следовательно, задача **нахождения первообразной** имеет **бесконечно много решений** (или говорят, что первообразная вычислена с точностью до постоянной).

Пример 2

Функция $F(x)=\sin x$ является первообразной для функции $f(x)=\cos x$ на R, так как для всех x из этого интервала выполнено равенство $F'(x)=(\sin x)'=\cos x=f(x)$. Так же как и в примере 1, функция $\overline{F}(x)=\sin x+C$ (где C – любая постоянная величина) тоже первообразная для функции $f(x)=\cos x$ на R, так как выполнено равенство $\overline{F}'(x)=f(x)$.

Пример 3

Для функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ на интервале $(0;\ \infty)$ первообразной является функция $F(x)=\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$, так как $F'(x)=\left(\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C\right)'=$ $=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}=f(x)$. Заметим, что на промежутке $[0;\ \infty)$ равенство $F'(x)=f(x)$ не выполняется, так как в точке $x=0$ функция $f(x)$ не определена. Поэтому на таком промежутке функция $F(x)$ не является первообразной для функции $f(x)$.

В заключение рассмотрим более сложную задачу.

Пример 4

Докажем, что функция $F(x) = x|x|$ является первообразной для функции $f(x) = 2|x|$ на промежутке $(-\infty; \infty)$.

Рассмотрим три случая.

а) При $x < 0$ функция $F(x) = -x^2$ и $f(x) = -2x$ и выполнено равенство $F'(x) = f(x)$. Поэтому на таком интервале функция $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$.

б) При $x > 0$ функция $F(x) = x^2$ и $f(x) = 2x$ и выполнено равенство $F'(x) = f(x)$. Тогда по определению на этом промежутке функция $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$.

в) При $x = 0$ необходимо найти производную $F'(0)$. Для этого используем определение производной $F'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x|x|-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ (очевидно, что $F(0) = 0$). Значение $f(0) = 2|0| = 0$. Поэтому при $x = 0$ также выполнено равенство $F'(x) = f(x)$ и для этой точки функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

Таким образом, было показано, что при всех действительных значениях x выполнено равенство $F'(x) = f(x)$. Тогда по определению функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty; \infty)$.

III. Задание на уроках

№ 326 (а, г); 327 (б, в); 328 (в, г); 330 (а); 331 (б); 332 (б); 333 (г); 334 (б).

IV. Контрольные вопросы

1. Расскажите о применении интегрирования в механике.
2. Объясните основную цель интегрирования.
3. Дайте определение первообразной функции.

V. Задание на дом

№ 326 (б, в); 327 (а, г); 329 (а, в); 330 (в); 331 (г); 332 (в); 333 (б); 334 (г).

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 3–4. Основное свойство первообразной

Цели: обосновать основное свойство первообразной; ознакомиться с таблицей первообразных и ее использованием для нахождения первообразных.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Найдите одну из первообразных для функции $f(x)$ на R:

а) $f(x) = 3 - 2x$; б) $f(x) = \sin x + 2\cos x$.

2. Является ли функция $F(x) = \sqrt{9 - x^2}$ первообразной для функции $f(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$ на промежутке $(-3; 3)$?

Вариант 2

1. Найдите одну из первообразных для функции $f(x)$ на R:

а) $f(x) = 2x - 4$; б) $f(x) = 2\sin x + \cos x$.

2. Является ли функция $F(x) = \sqrt{16 - x^2}$ первообразной для функции $f(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$ на промежутке $(-4; 4)$?

III. Изучение нового материала

Из предыдущего урока понятно, что **цель интегрирования** состоит **в нахождении для** данной **функции всех ее первообразных**, которых бесконечно много. Поэтому необходимо записывать **общий вид** этих **первообразных**. При решении такой задачи важно утверждение.

Признак постоянства функции: если производная $F'(x) = 0$ на некотором промежутке I, то сама функция $F(x)$ постоянна на этом промежутке.

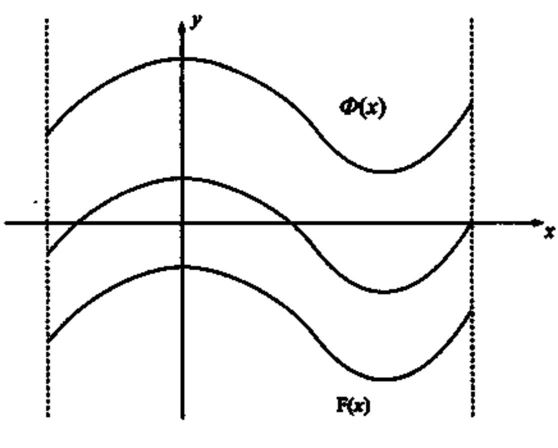
Для доказательства выберем некоторое число x_0 из промежутка I. Тогда для любого числа x из этого промежутка по формуле Лагранжа можно найти такое число c, заключенное между x и x_0, что выполняется соотношение $F(x) - F(x_0) = F'(c)(x - x_0)$. Но точка $c \in \mathrm{I}$ и по условию $F'(c)=0$. Тогда $F(x)-F(x_0)=0$ или $F(x)=F(x_0)$, т. е. функция $F(x)$ сохраняет постоянное значение $F(x_0)$ на промежутке I.

Все первообразные для функции $f(x)$ можно записать с **помощью одной формулы**, которую называют **общим видом первообразных** для функции $f(x)$. Для этого используют **теорему (основное свойство первообразных): любая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ на промежутке I имеет вид $\Phi(x) = F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на этом промежутке, C – произвольная постоянная.**

Докажем это утверждение. Найдем производную функцию $\Phi'(x)=(F(x)+C)'=F'(x)+C'=F'(x)$. По условию $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ и справедливо равенство $F'(x) = f(x)$. Но тогда выполнено и равенство $\Phi'(x) = f(x)$. Поэтому функция $\Phi(x)$ также первообразная для функции $f(x)$.

И обратно: пусть $\Phi(x)$ и $F(x)$ – две различные первообразные для функции $f(x)$ на промежутке I. Тогда справедливы равенства $\Phi'(x) = f(x)$ и $F'(x) = f(x)$ на этом промежутке. Найдем производную $(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$. Получили, что для всех $x\in \mathrm{I}$ верно соотношение $(\Phi(x)-F(x))'=0$. Поэтому на основании признака постоянства функции имеем, что разность $\Phi(x) - F(x)$ есть функция, принимающая некоторое постоянное значение C на промежутке I, т. е. $\Phi(x) - F(x) = C$. Отсюда следует, что $\Phi'(x) - F(x) + C$ для всех $x \in \mathrm{I}$ (что и требовалось доказать).

Основное свойство первообразной имеет простой **геометрический смысл: графики** любых двух **первообразных** $\Phi(x)$ и $F(x)$ для функции $f(x)$ получаются друг из друга **параллельным переносом вдоль оси ординат.**



Теперь рассмотрим типичные задачи на применение основного свойства первообразной.

Пример 1

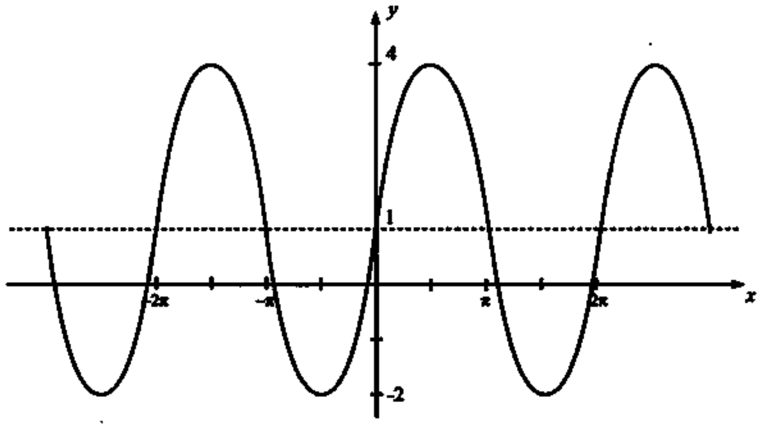
Найдем общий вид первообразных для функции $f(x) = x - 3x^2$.

Можно догадаться, что одной из первообразных для функции $f(x)$ является функция $\frac{x^2}{2} - x^3$, т. е. $\left(\frac{x^2}{2} - x^3\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x - 3x^2 = x - 3x^2$. По доказанной теореме общий вид первообразных для функции $f(x)$ может быть записан $F(x) = \frac{x^2}{2} - x^3 + C$.

Пример 2

Найти первообразную $F_0(x)$ для функции $f(x) = 3\cos x$, если $F_0(2\pi) = 1$. Построить график функции $F_0(x)$.

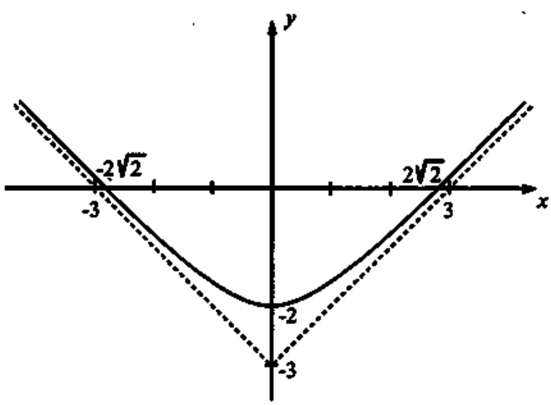
Учитывая таблицу производных, найдем для функции $f(x)$ общий вид первообразных: $F(x) = 3\sin x + C$. Действительно, выполняется равенство $F'(x) = (3\sin x + C)' = 3\cos x = f(x)$ для всех $x \in R$. Из всех первообразных $F(x)$ нас интересует только одна $F_0(x)$, удовлетворяющая условию $F_0(2\pi) = 1$. Поэтому для нахождения постоянной C получаем уравнение: $1 = 3\sin 2\pi + C$ или $1 = C$. Тогда искомая первообразная $F_0(x) = 3\sin x + 1$. Построим график функции $F_0(x)$. Этот график получается из графика функции $y = \sin x$ его растяжением в три раза и смещением на одну единицу вверх вдоль оси ординат.



Пример 3

Для функции $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $A(\sqrt{3};\,-1)$. Постройте этот график.

Легко проверить, что для функции $f(x)$ общий вид первообразных $F(x)=\sqrt{x^2+1}+C$. Действительно, $F'(x)=(\sqrt{x^2+1}+C)'=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=$ $=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=f(x)$. Так как график функции $F(x)$ проходит через точку A, то для нахождения постоянной C получаем уравнение: $-1=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}+C$ или $-1 = 2 + C$, откуда $C = -3$. Получили, что искомая первообразная $F(x)=\sqrt{x^2+1}-3$. Построим график этой функции. Найдем точки пересечения графика с осями координат. При $x = 0$ находим точку пересечения с осью ординат $y=\sqrt{1}-3=-2$. При $y = 0$ имеем уравнение: $0=\sqrt{x^2+1}-3$ или $3=\sqrt{x^2+1}$ и получаем точки пересечения с осью абсцисс $x=\pm2\sqrt{2}$. Учтем, что функция $F(x)$ – четная и ее график симметричен относительно оси ординат. При $|x|\to\infty$ функция $F(x)\to|x| - 3$. Строим график функции $F(x)$.



Пример 4

Пусть точка движется по прямой с постоянным ускорением a (равноускоренное движение) при начальной координате x_0 и скорости V_0 (т. е. в момент времени $t = 0$). Найдем скорость $V(t)$ и координату $x(t)$ точки как функции от времени.

Так как $a(t) = a$ или $V'(t) = a$, то (используя интегрирование) получаем: $V(t) = at + C_1$. Для нахождения постоянной C_1 учтем начальное условие задачи $V(0) = V_0$. Получаем $V_0 = a \cdot 0 + C_1$, откуда $C_1 = V_0$. Тогда скорость точки $V(t) = V_0 + at$.

Учтем, что $V(t) = V_0 + at$ и $x'(t) = V(t)$, и применяя интегрирование, найдем координату $x(t) = V_0 t + \frac{at^2}{2} + C_2$. Для определения постоянной C_2 учтем начальное условие задачи $x(0) = x_0$. Получаем равенство $x_0 = V_0 \cdot 0 + \frac{a \cdot 0^2}{2} + C_2$, откуда $C_2 = x_0$. Тогда координата точки $x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}$.

Итак, при равноускоренном движении (движении с постоянным ускорением a) скорость тела меняется по закону $V(t) = V_0 + at$, координата точки меняется по закону $x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}$ (что хорошо известно из курса физики).

Разумеется, такой же подход может быть использован и при более сложном характере движения тела. Возможность решения подобной задачи определяется лишь умением интегрировать функции.

Пример 5

Пусть точка движется по прямой с ускорением $a(t) = a_0 + kt + b\sin(\omega t)$, где t – время; a_0 – начальное ускорение; k, b, ω – некоторые постоянные величины (физический смысл их разъяснять не будем). Начальная скорость точки V_0 и координата x_0. Найдем скорость $V(t)$ и координату $x(t)$ как функции времени.

Решаем задачу аналогично предыдущей. Так как $V'(t) = a_0 + kt + b\sin(\omega t)$, то, интегрируя, находим скорость тела $V(t) = a_0 t + \frac{kt^2}{2} - \frac{b}{\omega}\cos(\omega t) + C_1$. Для нахождения постоянной C_1 учтем начальное условие $V(0) = V_0$. Получаем равенство $V_0 = -\frac{b}{\omega} + C_1$, откуда $C_1 = V_0 + \frac{b}{\omega}$. Тогда закон изменения скорости со временем имеет вид $V(t) = a_0 t + \frac{kt^2}{2} - \frac{b}{\omega}\cos(\omega t) + \left(v_0 + \frac{b}{\omega}\right)$.

Учтем, что $x'(t) = V(t)$, и найдем координату тела $x(t) = \frac{a_0 t^2}{2} + \frac{kt^3}{6} - \frac{b}{\omega^2}\sin(\omega t) + \left(V_0 + \frac{b}{\omega}\right)t + C_2$. Для определения постоянной C_2 опять учтем начальное условие задачи $x(0) = x_0$. Получаем соотношение $x_0 = C_2$. Тогда координата точки вычисляется по формуле $x(t) = x_0 + \left(V_0 + \frac{b}{\omega}\right)t + \frac{a_0 t^2}{2} + \frac{kt^3}{6} - \frac{b}{\omega^2}\sin(\omega t)$.

Разумеется, при $k = 0$ и $b = 0$ результаты этой задачи переходят в результаты предыдущей задачи.

Для дальнейшей работы необходимо знать **первообразные для** основных (изучаемых в школе) **функций** (см. таблицу) и **правила интегрирования** (следующий урок).

Таблица первообразных для функций

Функция $f(x)$	k (постоянная)	x^n $(n \neq -1)$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Первообразная $F(x)$ (общий вид)	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Функция $f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
Первообразная $F(x)$ (общий вид)	$\arcsin x + C$; $-\arccos x + \overline{C}$	$\operatorname{arctg} x + C$; $-\operatorname{arcctg} x + \overline{C}$

Заметим, что из двух последних столбцов следует, что первообразная от функции выражается через две различные обратные тригонометрические функции. Такую особенность легко понять, если учесть формулу $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, откуда $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$.

Тогда $\arcsin x + C = \frac{\pi}{2} - \arccos x + C = -\arccos x + \left(C - \frac{\pi}{2}\right) = -\arccos x + \overline{C}$,

где $\overline{C} = C - \frac{\pi}{2}$ – новая постоянная.

Приведенную таблицу легко проверить, выполнив обратную операцию – продифференцировав функцию $F(x)$ и сравнив результат с функцией $f(x)$ (рекомендуем сделать это самостоятельно).

IV. Задание на уроках

№ 335 (а, б); 336 (б); 337 (а, б); 338 (в, г); 339 (б, в); 340 (б, г); 341 (а, б).

V. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и докажите признак постоянства функции.

2. Приведите общий вид первообразных для функции $f(x)$ и обоснуйте его.

3. Объясните геометрический смысл основного свойства первообразной.

4. Выпишите таблицу первообразных для функций (советуем фронтально у доски). Используя определение первообразной, поясните столбцы этой таблицы.

VI. Задание на дом

№ 335 (в, г); 336 (в); 337 (в, г); 338 (а, б); 339 (а, г); 340 (а, в); 341 (в, г).

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 5–7. Три правила нахождения первообразной

Цель: рассмотреть основные правила интегрирования и применение их для вычисления первообразной.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Сформулируйте основное свойство первообразной.

2. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)$ и напишите ту первообразную, график которой проходит через точку A:

а) $f(x)=3+x^2$, $A(1;\,4)$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $A\left(\dfrac{3\pi}{4};\,-2\right)$.

Вариант 2

1. Объясните геометрический смысл основного свойства первообразной.

2. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)$ и напишите ту первообразную, график которой проходит через точку A:

а) $f(x)=2-x^2$, $A(1;-3)$; б) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$, $A\left(\frac{5\pi}{4};-4\right)$.

III. Изучение нового материала

В конце предыдущего урока была приведена таблица первообразных для некоторых функций. Следующий шаг в изучении рассматриваемой темы – **правила интегрирования** и их применение для нахождения первообразных функций. Эти правила **похожи** на соответствующие правила дифференцирования.

Правило 1. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то функция $F(x)+G(x)$ – первообразная для функции $f(x)+g(x)$. Можно сформулировать короче: **первообразная для суммы функций равна сумме первообразных каждой функции.**

Используя определение первообразной, имеем: $F'(x)=f(x)$ и $G'(x)=g(x)$, тогда $(F(x)+G(x))'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$.

Пример 1

Найдем первообразную для функции $f(x)=x^4-\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sin^2 x}$.

Учтем, что функция $f(x)=x^4-x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\sin^2 x}$ представляет собой алгебраическую сумму трех функций. Используя таблицу первообразных и правило 1, найдем: $F(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-\operatorname{ctg}x+C=\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-$
$-\operatorname{ctg}x+C=\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-\operatorname{ctg}x+C.$

Правило 2. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, а k – постоянная, то функция $kF(x)$ – первообразная для функции $kf(x)$. Или короче: **первообразная для произведения числа и функции равна произведению числа на первообразную функции.**

Исходя из определения первообразной и используя правило дифференцирования, получаем: $(kF(x))'=kF'(x)=kf(x)$.

Пример 2

Найдем первообразную функции $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x$.

Используя рассмотренное правило и таблицу первообразных, получаем: $F(x) = 2\sqrt{3}(-\cos x) + C = -2\sqrt{3}\cos x + C$.

Правило 3. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то функция $\frac{1}{k}F(kx+b)$ – первообразная для функции $f(kx+b)$, где k и b – постоянные. Короче: **первообразная для функции, зависящей от аргумента $kx+b$ (где k и b – постоянные), равна произведению числа $\frac{1}{k}$ на первообразную для функции от x при значении аргумента $kx+b$.**

Учитывая правило дифференцирования сложной функции, получаем: $\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = F'(kx+b) = f(kx+b)$.

Пример 3

Найдем первообразную функции $f(x) = \cos(\sqrt{5}x+3)$.

Так как первообразная для функции $\cos x$ есть функция $\sin x$, то в соответствии с правилом 3 первообразная для функции $f(x) = \cos(\sqrt{5}x+3)$ – функция $F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}x+3) + C$.

Пример 4

Найдем первообразную для функции $f(x) = \frac{1}{(8-5x)^7}$.

Запишем функцию в виде $f(x) = (-5x+8)^{-7}$. Так как первообразная для функции x^{-7} есть функция $\frac{x^{-6}}{-6} = -\frac{1}{6}x^{-6}$, то первообразная для $f(x)$ – функция $F(x) = -\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(-5x+8)^{-6} + C = \frac{1}{30(8-5x)^6} + C$.

Разумеется, три рассмотренных правила интегрирования можно использовать **совместно**.

Пример 5

Найдем первообразную для функции $f(x) = 3\sqrt{5-2x} - 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + 7x^5 - 4$.

Учитывая правила 1–3, найдем первообразную для данной функции: $F(x)=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(5-2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)\right)+7\frac{x^6}{6}-4x+C=$

$=-(5-2x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{7}{6}x^6-4x+C.$

Как и ранее, разобранные правила используются и при решении физических задач.

Пример 6

Точка массой $m=2$ кг движется вдоль оси OX под действием силы, направленной вдоль этой оси и равной $F(x)=2t+1-5\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$. Найдите закон $x(t)$ движения точки, если при $t=\frac{2}{3}$ с скорость точки равна $\frac{23}{9}$ м/с, координата равна $\frac{40}{81}$ м. Здесь F – сила в ньютонах, t – время в секундах, x – путь в метрах.

По второму закону Ньютона $F=ma$ (где a – ускорение тела), откуда $a=\frac{F}{m}$. Для данной задачи имеем: $a(t)=t+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$.

Скорость тела $V(t)$ есть первообразная для ее ускорения $a(t)$. Поэтому находим $V(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{t}{2}-\frac{5}{2\pi}\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+C_1$. Постоянную C_1 определим, используя начальное условие $V\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{23}{9}$. Получаем равенство $\frac{23}{9}=\frac{2}{9}+\frac{1}{3}-\frac{5}{2\pi}\sin\pi+C_1$, откуда $C_1=2$. Тогда скорость тела меняется по закону $V(t)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t-\frac{5}{2\pi}\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+2.$

Аналогично, координата $x(t)$ есть первообразная для скорости $V(t)$. Поэтому получаем: $x(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}-\frac{5}{2\pi}\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\right)+2t+C_2=$

$=\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{4}t^2+2t+\frac{5}{2\pi^2}\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+C_2$. Для нахождения постоянной C_2

вновь используем начальное условие $x\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{40}{81}$. Имеем равенство:

$\frac{40}{81}=\frac{1}{6}\cdot\frac{8}{27}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{2}{3}+\frac{5}{2\pi^2}\cos\pi+C_2$ или $\frac{40}{81}=\frac{121}{81}-\frac{5}{2\pi^2}+C_2$, откуда $C_2=\frac{5}{2\pi^2}-1$. Итак, закон движения точки $x(t)=\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{4}t^2+$ $+2t+\frac{5}{2\pi^2}\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5}{2\pi^2}-1$.

В заключение сделаем **ряд важных замечаний**.

1) Имеется существенное **отличие в правилах интегрирования и дифференцирования. Не существует правил** для нахождения первообразных от произведения функций, частного функций, сложной функции (при нахождении производных такие правила имеют место).

2) В связи с п. 1 **процесс интегрирования** намного **сложнее** операции дифференцирования. Например, нахождение первообразных для функций $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$, $f(x)=\operatorname{tg}x$, $f(x)=\sin 2x\cos 3x$, $f(x)=x\cos x$ и т. д. является достаточно **сложной задачей** и требует применения **разнообразных приемов**. В то же время вычисление производных от этих функций никакого труда не составляет.

3) В соответствии с п. 1 **первообразные** для некоторых функций (например, $f(x)=\frac{\sin x}{x^n}$, $f(x)=x^n\operatorname{tg}x$, $f(x)=\frac{\arcsin x}{x}$, $f(x)=\sin x^2$ и т. д.) **существуют,** но **не могут быть записаны с помощью элементарных функций.**

4) **Первообразная** функция в курсе математического анализа называется **неопределенным интегралом** (в этом курсе понятия первообразной не существует). Причины такого термина будут понятны при изучении следующего параграфа. В конце рассматриваемой главы будут **дополнительно** рассмотрены **основные методы интегрирования** (фактически в школе изучается только один способ – **табличное интегрирование**, который пригоден лишь **для** самых **простых функций**).

IV. Задание на уроках

№ 342 (а, б); 343 (в, г); 344 (а); 345 (г); 346 (а, б); 347 (г); 349; 351 (а, б); 352 (б).

V. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и докажите правило о первообразной суммы функций.

2. Докажите правило о первообразной произведения постоянной и функции.

3. Обоснуйте правило о первообразной функции с аргументом $kx + b$.

VI. Задание на дом

№ 342 (в, г); 343 (а, б); 344 (в); 345 (а); 346 (в, г); 347 (б); 348; 350; 351 (в, г); 352 (г).

VII. Подведение итогов уроков

Уроки № 8–9. Контрольная работа по теме «Первообразная»

Цель: проверить знания учащихся, используя разноуровневые варианты.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее и варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит шесть задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

1. Докажите, что функция $F(x) = x^2 + \sin x - 7$ является первообразной для функции $f(x) = 2x + \cos x$.

2. Для функции $f(x) = 2(x-1)$:

а) найдите общий вид первообразных;

б) напишите первообразную, график которой проходит через точку $A(2; 4)$;

в) постройте график этой функции.

3. Найдите общий вид первообразных для функции
$$f(x) = (3x-2)^3 - 2\cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right).$$

4. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой $V(t) = t^2 - 3t + 2$. Напишите формулы зависимости ее ускорения a и координаты x от времени t, если в начальный момент времени ($t = 0$) координата $x = -5$.

Вариант 2

1. Докажите, что функция $F(x) = x^3 - \cos x + 7$ является первообразной для функции $f(x) = 3x^2 + \sin x$.

2. Для функции $f(x) = 2(x+1)$:

а) найдите общий вид первообразных;

б) напишите первообразную, график которой проходит через точку $A(-2; -3)$;

в) постройте график этой функции.

3. Найдите общий вид первообразных для функции
$$f(x) = (5x-3)^2 + 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

4. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой $V(t) = -t^2 + 4t + 3$. Напишите формулы зависимости ее ускорения a и координаты x от времени t, если в начальный момент времени ($t = 0$) координата $x = -2$.

Вариант 3

1. Докажите, что функция $F(x) = 7x^5 + 5\cos^2 3x - 2$ является первообразной для функции $f(x) = 35x^4 + 15\sin 6x$.

2. Для функции $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}$:

а) найдите общий вид первообразных;

б) напишите первообразную, график которой проходит через точку $A\left(\frac{5\pi}{4}; \sqrt{2}\right)$;

в) постройте график этой функции.

3. Найдите все первообразные функции $f_1(x) = x^2$, графики которых касаются параболы $f_2(x) = x^2 + 1$.

4. Скорость прямолинейно движущегося тела задана формулой $V(t) = 5\sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$. Напишите формулы зависимости его ускорения a и координаты x от времени t, если при $t = \frac{\pi}{2}$ координата $x = \frac{9}{4}$. В этот момент времени найдите a и V.

Вариант 4

1. Докажите, что функция $F(x) = 6x^4 - 3\sin^2 2x + 5$ является первообразной для функции $f(x) = 24x^3 - 6\sin 4x$.

2. Для функции $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$:

а) найдите общий вид первообразных;

б) напишите первообразную, график которой проходит через точку $A\left(\frac{7\pi}{4}; 2\sqrt{2}\right)$;

в) постройте график этой функции.

3. Найдите все первообразные функции $f_1(x) = -x^2$, графики которых касаются параболы $f_2(x) = x^2 - 3$.

4. Скорость прямолинейно движущегося тела задана формулой $V(t) = 4\cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)$. Напишите формулы зависимости его ускорения a и координаты x от времени t, если при $t = \frac{\pi}{3}$ координата $x = \frac{5}{3}$. В этот момент времени найдите a и V.

Вариант 5

1. Найдите первообразную для функции

$$f(x) = \frac{3}{\cos^2(4x-1)} + 2\sin(3-2x) + 5.$$

2. Для функции $f(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$:

а) найдите общий вид первообразных;

б) напишите первообразную, график которой проходит через точку $A(\sqrt{3};\ 2)$;

в) постройте график этой функции.

3. Для функции $f(x) = \sin 5x \cos 2x$ найдите общий вид первообразных.

4. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $A(1;\ 2)$, у которой тангенс угла наклона касательной в каждой точке в три раза больше квадрата абсциссы этой точки.

Вариант 6

1. Найдите первообразную для функции

$$f(x) = \frac{4}{\sin^2(3x-2)} + 5\cos(7-4x) - 2.$$

2. Для функции $f(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$:

а) найдите общий вид первообразных;

б) напишите первообразную, график которой проходит через точку $A(\sqrt{5};\ 3)$;

в) постройте график этой функции.

3. Для функции $f(x) = \sin 7x \cos 3x$ найдите общий вид первообразных.

4. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $A(2;\ 5)$, у которой тангенс угла наклона касательной в каждой точке в два раза больше абсциссы этой точки.

Урок 10. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы; рассмотреть наиболее типичные ошибки; разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
–	1				
Ø	1				

Обозначения:

\+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными ошибками;

– – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу. Вариант 1, 2 – 8 учеников.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: учесть определение первообразной.

2. *Ответы*:

а) $F(x)=(x-1)^2+C$;

б) $F(x)=(x-1)^2+3$;

в) постройте график функции $y=(x-1)^2+3$ смещением графика $y=x^2$ на одну единицу вправо и на три единицы вверх.

3. *Ответ*: $F(x)=\frac{1}{12}(3x-2)^4-\frac{2}{5}\sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)+C.$

4. *Ответ*: $a=2t-3,\ x=\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t-5.$

Вариант 2

1. *Ответ*: учесть определение первообразной.

2. *Ответы*:

а) $F(x)=(x+1)^2+C$;

б) $F(x)=(x+1)^2-4$;

в) постройте график функции $y=(x+1)^2-4$ смещением графика $y=x^2$ на одну единицу влево и на четыре единицы вниз.

3. *Ответ*: $F(x)=\frac{1}{15}(5x-3)^3-\frac{3}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+C.$

4. *Ответ*: $a=-2t+4,\quad x=-\frac{1}{3}t^3+2t^2+3t-2.$

Вариант 3

1. *Ответ*: учесть определение первообразной.
2. *Ответы*:
а) $F(x)=\sin x+\cos x+C$;
б) $F(x)=\sin x+\cos x+2\sqrt{2}$;
в) привести функцию к виду $F(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sqrt{2}$. График этой функции получается из графика функции $y=\sin x$ смещением на $\frac{\pi}{4}$ влево, растяжением в $\sqrt{2}$ раз вдоль оси ординат и смещением на $2\sqrt{2}$ вверх.
3. *Ответ*: $F(x)=\frac{1}{3}x^3+1$ и $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{3}$ (учесть, что в точке касания $F(x)=f_2(x)$ и $f_1(x)=f_2'(x)$).
4. *Ответ*: $a=10\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right),\quad x=-\frac{5}{2}\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)+1,\quad a\left(\frac{\pi}{2}\right)=-5,$ $V\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5}{2}\sqrt{3}.$

Вариант 4

1. *Ответ*: учесть определение первообразной.
2. *Ответы*:
а) $F(x)=\sin x-\cos x+C$;
б) $F(x)=\sin x-\cos x+3\sqrt{2}$;
в) привести функцию к виду $F(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+3\sqrt{2}$. График этой функции получается из графика функции $y=\sin x$ смещением на $\frac{\pi}{4}$ вправо, растяжением в $\sqrt{2}$ раз вдоль оси ординат и смещением на $3\sqrt{2}$ вверх.

3. *Ответ*: $F(x)=-\frac{1}{3}x^3-3$ и $F(x)=-\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}$ (учесть, что в точке касания $F(x)=f_2(x)$ и $f_1(x)=f_2'(x)$).

4. *Ответ*: $a=-12\sin\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)$, $x=\frac{4}{3}\sin\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)+1$, $a\left(\frac{\pi}{3}\right)=-6$, $V\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\sqrt{3}$.

Решения

Вариант 5

1. Используя правила интегрирования и таблицу первообразных, найдем первообразную данной функции: $F(x)=\frac{3}{4}\operatorname{tg}(4x-1)-$ $-\frac{2}{-2}\cos(3-2x)+5x+C=\frac{3}{4}\operatorname{tg}(4x-1)+\cos(3-2x)+5x+C$.

Ответ: $F(x)=\frac{3}{4}\operatorname{tg}(4x-1)+\cos(3-2x)+5x+C$.

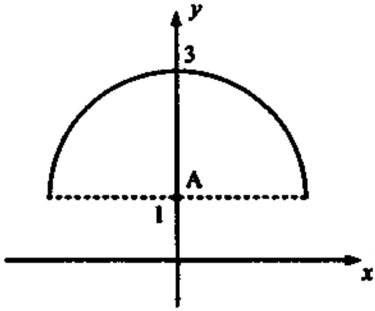
2а) Учитывая таблицу первообразных и правила интегрирования, найдем общий вид первообразных для данной функции: $F(x)=\sqrt{4-x^2}+C$.

Ответ: $F(x)=\sqrt{4-x^2}+C$.

2б) Для нахождения постоянной C учтем, что график первообразной проходит через точку $A(\sqrt{3};2)$ и координаты этой точки удовлетворяют уравнению первообразной $2=\sqrt{4-(\sqrt{3})^2}+C$, откуда $C=1$. Таким образом, первообразная имеет вид $F(x)=\sqrt{4-x^2}+1$.

Ответ: $F(x)=\sqrt{4-x^2}+1$.

2в) Для построения графика полученной функции запишем ее в виде $y-1=\sqrt{4-x^2}$. Учтем, что $y-1\geq 0$ (т. е. $y\geq 1$), и возведем в квадрат обе части зависимости $(y-1)^2=4-x^2$ или $x^2+(y-1)^2=2^2$. Таким образом, графиком данной функции является верхняя полуокружность с центром в точке $A(0;1)$ и радиусом 2.



Ответ: см. график.

3. Используя формулы преобразования произведения функций в сумму, данную функцию запишем в виде $f(x)=\frac{1}{2}(\sin 3x+\sin 7x)$. Теперь, применяя таблицу первообразных и правила интегрирования, найдем первообразную для данной функции: $F(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x-\frac{1}{7}\cos 7x\right)+C=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{14}\cos 7x+C.$

Ответ: $F(x)=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{14}\cos 7x+C.$

4. Пусть дана функция $F(x)$. Тогда тангенс угла наклона касательной по условию задачи $\operatorname{tg}\alpha=F'(x)=3x^2$ в каждой точке x. Таким образом, надо найти первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=3x^2$. Получаем $F(x)=x^3+C$. Так как график этой первообразной проходит через точку $A(1;\ 2)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению первообразной. Имеем равенство $2=1^3+C$, откуда постоянная $C=1$. Таким образом, уравнение заданной кривой $F(x)=x^3+1$.

Ответ: $F(x)=x^3+1$.

Вариант 6

1. Используя правила интегрирования и таблицу первообразных, найдем первообразную данной функции: $F(x)=-\frac{4}{3}\operatorname{ctg}(3x-2)+$

$+\frac{5}{-4}\sin(7-4x)-2x+C=-\frac{4}{3}\operatorname{ctg}(3x-2)-\frac{5}{4}\sin(7-4x)-2x+C.$

Ответ: $F(x)=-\frac{4}{3}\operatorname{ctg}(3x-2)-\frac{5}{4}\sin(7-4x)-2x+C.$

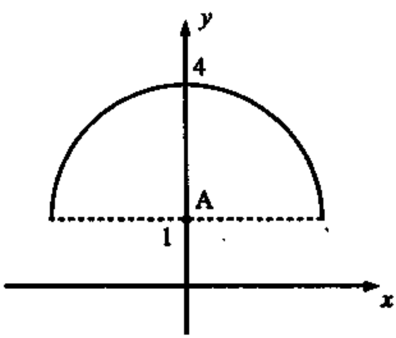
2а) Учитывая таблицу первообразных и правила интегрирования, найдем общий вид первообразных для данной функции: $F(x)=\sqrt{9-x^2}+C$.

Ответ: $F(x)=\sqrt{9-x^2}+C$.

2б) Для нахождения постоянной C учтем, что график первообразной проходит через точку $A(\sqrt{5};3)$ и координаты этой точки удовлетворяют уравнению первообразной $3=\sqrt{9-(\sqrt{5})^2}+C$, откуда $C=1$. Таким образом, первообразная имеет вид $F(x)=\sqrt{9-x^2}+1$.

Ответ: $F(x)=\sqrt{9-x^2}+1$.

2в) Для построения графика полученной функции запишем ее в виде $y-1=\sqrt{9-x^2}$. Учтем, что $y-1\geq 0$ (т. е. $y\geq 1$), и возведем в квадрат обе части зависимости $(y-1)^2=9-x^2$ или $x^2+(y-1)^2=3^2$. Таким образом, графиком данной функции является верхняя полуокружность с центром в точке $A(0;1)$ и радиусом 3.



Ответ: см. график.

3. Используя формулы преобразования произведения функций в сумму, данную функцию запишем в виде $f(x)=\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 10x)$. Теперь, применяя таблицу первообразных и правила интегрирования, найдем первообразную для данной функции: $F(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{10}\cos 10x\right)+C=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{20}\cos 10x+C$.

Ответ: $F(x)=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{20}\cos 10x+C$.

4. Пусть дана функция $F(x)$. Тогда тангенс угла наклона касательной по условию задачи $\operatorname{tg}\alpha = F'(x) = 2x$ в каждой точке x. Таким образом, надо найти первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = 2x$. Получаем: $F(x) = x^2 + C$. Так как график этой первообразной проходит через точку $A(2;\ 5)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению первообразной. Имеем равенство $5 = 2^2 + C$, откуда постоянная $C = 1$. Таким образом, уравнение заданной кривой $F(x) = x^2 + 1$.

Ответ: $F(x) = x^2 + 1$.

§8. Интеграл

Уроки 11–12. Площадь криволинейной трапеции

Цели: ознакомиться с понятием криволинейной трапеции и нахождением ее площади; установить связь между этой площадью и первообразной.

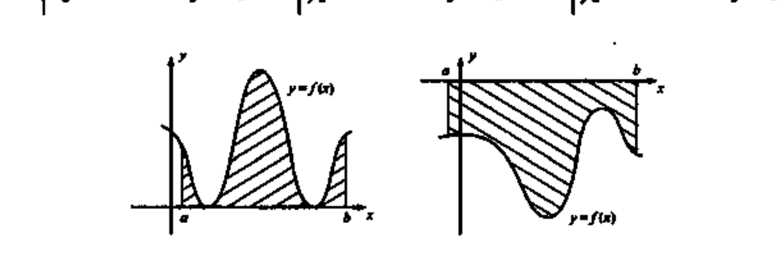
Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Изучение нового материала

В курсе геометрии были получены формулы для вычисления **площадей простейших фигур** (треугольников и некоторых многоугольников) **и объемов тел** (призм, пирамид, цилиндров, конусов, шаров). В то же время круг таких задач намного разнообразнее, и необходимо рассмотреть общий подход к подобным задачам. Кроме того, к аналогичным проблемам приводят **многие задачи физики и техники.**

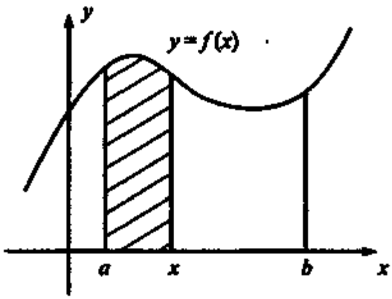
Сначала рассмотрим понятие криволинейной трапеции. Пусть на отрезке $[a; b]$ оси абсцисс задана непрерывная функция $f(x)$, не меняющая на нем знака. **Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком $[a; b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, называют криволинейной трапецией.** Примеры криволинейных трапеций приведены на рисунке.



Для вычисления площадей криволинейных трапеций используется теорема: **если функция $f(x)$ непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a; b]$, а $F(x)$ – ее первообразная на этом отрезке, то пло-**

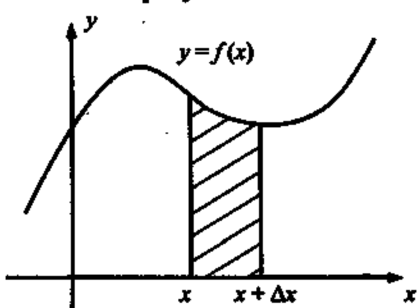
щадь S соответствующей криволинейной трапеции равна изменению первообразной на отрезке $[a;\ b]$, т. е. $S = F(b) - F(a)$.

Для доказательства рассмотрим функцию $S(x)$, определенную на отрезке $[a;\ b]$. Если $a < x \le b$, то $S(x)$ – площадь той части криволинейной трапеции, которая ограничена графиком функции $f(x)$, отрезком $[a;\ x]$ и прямыми $x = a$ и $x = x$. Очевидны два предельных случая: если $x = a$, то $S(a) = 0$; если $x = b$, то $S(b) = S$ (S – площадь криволинейной трапеции).

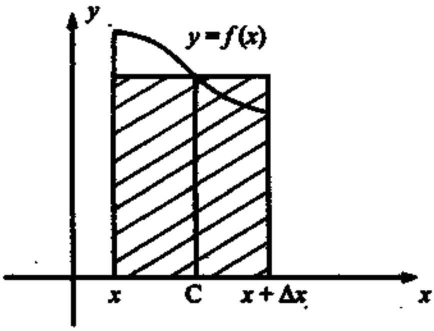


Теперь покажем, что $S'(x) = f(x)$ или $\dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} \to f'(x)$ при $\Delta x \to 0$.

Рассмотрим случай $\Delta x < 0$. Тогда $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$ – площадь фигуры, заштрихованной на рисунке.



Возьмем теперь прямоугольник той же площадью $\Delta S(x)$ (равновеликий прямоугольник), опирающийся на тот же отрезок $[x;\ x + \Delta x]$. В силу непрерывности функции $f(x)$ верхняя сторона прямоугольника пересекает график функции $f(x)$ в некоторой точке $c \in [x;\ x + \Delta x]$. Высота прямоугольника равна $f(c)$. Тогда площадь прямоугольника $\Delta S(x) = f(c) \cdot \Delta x$, откуда $\dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(c)$. Так как точка c лежит между x и $x + \Delta x$, то при $\Delta x \to 0$ точка c стремится к x. Учитывая, что функция $f(x)$ непрерывная, $f(c) \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$. Поэтому $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x)$ при $\Delta x \to 0$.



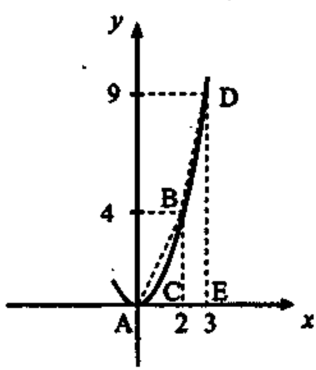
Итак, было доказано, что функция $S(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$. По основному свойству первообразных имеем $S(x) = F(x) + C$ для всех $x \in [a; b]$, где C – некоторая постоянная, $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$. Для нахождения постоянной C подставим $x = a$ и получим: $S(a) = 0 = F(a) + C$, откуда $C = -F(a)$. Поэтому $S(x) = F(x) - F(a)$. Так как площадь криволинейной трапеции равна $S(b)$, то, подставляя $x = b$ в полученную формулу, найдем $S = S(b) = F(b) - F(a)$. Таким образом, приведенная теорема доказана.

Пример 1

Вычислим и оценим площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2$, прямой $y = 0$:

а) прямой $x = 2$; б) прямыми $x = 2$ и $x = 3$.

Нарисуем эскиз графика функции $f(x) = x^2$ – параболу.



Одна из первообразных для этой функции $F(x)=\frac{x^3}{3}$. Теперь найдем площади данных криволинейных трапеций:

а) $S_{ABC}=F(2)-F(0)=\frac{2^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$.

Для оценок можно рассматривать вместо криволинейной трапеции прямоугольный треугольник ABC. Тогда его площадь равна $\overline{S}_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4$.

б) $S_{CBDE}=F(3)-F(2)=\frac{3^3}{3}-\frac{2^3}{3}=\frac{19}{3}=6\frac{1}{3}$.

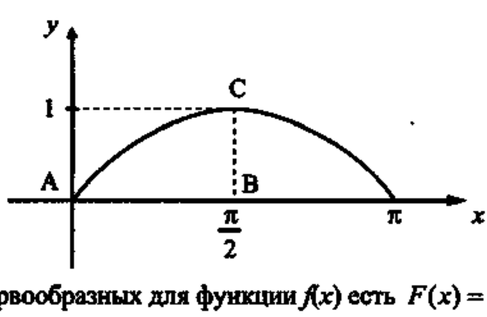
Для оценок будем рассматривать прямоугольную трапецию $CBDE$. Тогда ее площадь равна $\overline{S}_{CBDE}=\frac{BC+DE}{2}\cdot CE=\frac{4+9}{2}\cdot 1=6{,}5$.

Видно, что оценки приводят к более высоким значениям площадей, чем это есть в реальности. Связано это с тем, что график данной функции направлен кривизной вниз и хорды AB и BD расположены выше соответствующих дуг. Точность оценок зависит от того, насколько длина дуги отличается от длины хорды, и составляет в случае а) 50% и в случае б) – около 3%.

Пример 2

Вычислим и оценим площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)=\sin x$ и прямой $y=0$ при $x\in[0;\pi]$.

Нарисуем график данной функции.



Одна из первообразных для функции $f(x)$ есть $F(x)=-\cos x$. Тогда площадь S данной криволинейной трапеции равна $S=F(\pi)-F(0)=-\cos\pi+\cos 0=1+1=2$. Для оценок можно воспользоваться формулой для площади эллипса $S=\pi ab$, где a и b – полуоси (в частности, при $a=b=R$ из этой формулы получается формула площади круга $S=\pi R^2$). Приведенную криволинейную трапецию для оценок можно рассматривать как полуэллипс, полуоси которого $AB = \frac{\pi}{2}$ и $BC = 1$. Тогда его площадь $S = \frac{1}{2}\pi AB \cdot BC = = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi^2}{4} \approx 2,5$.

III. Задание на уроках

№ 353 (а, б); 354 (б, в); 355 (б, г); 356 (а, г).

IV. Контрольные вопросы

1. Дайте определение криволинейной трапеции.
2. Сформулируйте теорему о площади криволинейной трапеции.

V. Задание на дом

№ 353 (в, г); 354 (а, г); 355 (а, в); 356 (б, в).

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 13–15. Интеграл. Формула Ньютона – Лейбница

Цели: рассмотреть понятие интеграла и формулу Ньютона – Лейбница; освоить навыки вычисления площадей фигур.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определение криволинейной трапеции.
2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $f(x) = \sqrt{x-1} + 2,\ y = 0, x = 1, x = 5;$

б) $f(x) = \cos x + 3,\ y = 0, x = 0, x = 2\pi.$

Вариант 2

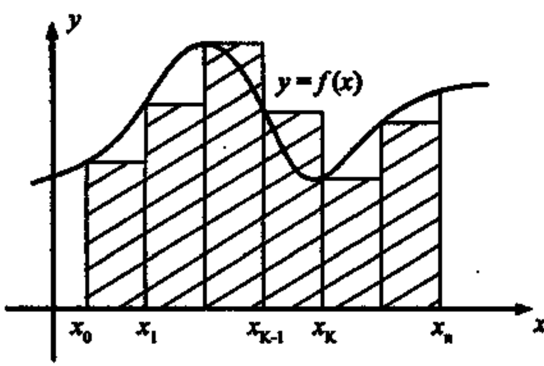
1. Сформулируйте теорему о площади криволинейной трапеции.
2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $f(x) = \sqrt{2-x} + 1,\ y = 0, x = 2, x = -7;$

б) $f(x) = \sin x + 4,\ y = 0, x = 0, x = \pi.$

III. Изучение нового материала

Для понятия интеграла рассмотрим другой подход к вычислению площади криволинейной трапеции. Будем считать, что функция $f(x)$ непрерывна (и для простоты неотрицательна) на отрезке $[a; b]$. Тогда площадь S криволинейной трапеции можно приближенно подсчитать следующим образом. Разобьем отрезок $[a; b]$ на n отрезков одинаковой длины $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$ (где $k = 1, 2, \ldots, n$) точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b$. На каждом из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ как на основании построим прямоугольник высотой $f(x_{k-1})$. Площадь этого прямоугольника равна $f(x_{k-1})\Delta x = \dfrac{b-a}{n} f(x_{k-1})$, а сумма площадей всех таких прямоугольников равна $\dfrac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{k-1}))$.



В силу непрерывности функции $f(x)$ объединение построенных прямоугольников при большом n (т. е. при малом Δx) почти совпадает с криволинейной трапецией. Поэтому при больших n величина $S_n \approx S$. Другими словами, S_n стремится к S при n, стремящемся к бесконечности, т. е. $S_n \to S$ при $n \to \infty$.

Вообще говоря, для любой непрерывной на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ величина S_n при $n \to \infty$ стремится к некоторому числу I. Причем функция $f(x)$ может иметь любой знак, промежутки деления $[x_{k-1}; x_k]$ могут иметь различную длину, и высота построенных прямоугольников может иметь величину $f(C_{k-1})$, где произвольная точка $C_{k-1} \in [x_{k-1}; x_k]$. Такое число I по определению называют интегралом (а чаще определенным интегралом) функции $f(x)$ от a до b

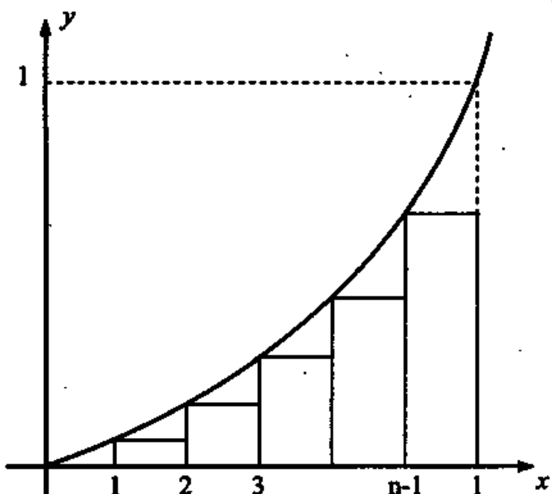
и обозначают $\int_a^b f(x)dx$ (читается: интеграл от a до b эф от икс дэ икса). Числа a и b называются **пределами интегрирования:** a – нижним пределом, b – верхним. Знак $\int$ называют **знаком интегрирования**. Функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, переменная x – **переменной интегрирования**.

Итак, если функция $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$, то **площадь S** соответствующей криволинейной трапеции **выражается формулой** $S = \int_a^b f(x)dx$.

Пример 1

Пользуясь определением интеграла, вычислим $\int_0^1 x^2 dx$ (найдем площадь соответствующей криволинейной трапеции).

Построим график функции $y = x^2$.



Разобьем отрезок интегрирования [0; 1] на n равных частей. Будем аппроксимировать криволинейную трапецию объединением прямоугольников, построенных под такой трапецией. На каждом промежутке $\left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right]$ строим прямоугольник высотой

$f\left(\frac{k-1}{n}\right)=\frac{(k-1)^2}{n^2}$, где $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$. Площадь такого прямоугольника равна $\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k-1}{n}\right)=\frac{(k-1)^2}{n^3}$. Сумма площадей всех подобных прямоугольников составляет $S_n=\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-2)^2}{n^3}+\frac{(n-1)^2}{n^3}=$ $=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\ldots+(n-2)^2+(n-1)^2)$.

Теперь нужно найти сумму квадратов натуральных чисел $1, 2, \ldots, n-2$, $n-1$. Для этого воспользуемся хорошо известной в математике формулой $1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Тогда получаем: $1^2+2^2+\ldots+(n-2)^2+(n-1)^2=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ и $S_n=\frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1)=$ $=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$. Очевидно, что при $n\to\infty$ величина $\frac{1}{n}\to 0$ и тогда $S_n\to\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}$. Итак, получили: $\int\limits_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$. Так как первообразная для функции $f(x)=x^2$ есть $F(x)=\frac{x^3}{3}$. Поэтому получили, что площадь криволинейной трапеции равна $S=F(1)-F(0)=$ $=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}$.

Из рассмотренного примера видно, что **вычисление интегралов с использованием определения** даже в простейших случаях **является** достаточно **трудоемкой задачей**. Поэтому необходимо **связать понятие интеграла и понятие первообразной**. Сделаем это.

Используя разные подходы, для площади криволинейной трапеции получили две различные формулы:

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx \text{ и } S=F(b)-F(a).$$

Сравнивая эти формулы, получаем: $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ для функции $f(x)$ непрерывной на отрезке $[a; b]$. Полученная формула называется **формулой Ньютона – Лейбница**. Для простоты при получении этой формулы использовалось ограничение $f(x)\ge 0$. На самом деле

формула Ньютона – Лейбница справедлива и без такого ограничения.

Давайте теперь уточним терминологию. Будем придерживаться терминов, принятых в курсе математического анализа, изучаемого в вузах. Исходя из структуры формулы Ньютона – Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ первообразную функцию $F(x)$ называют **неопределенным интегралом** и обозначают символом $\int f(x)dx$, т. е. $F(x) = \int f(x)dx$. Такой термин связан с тем, что для функции $f(x)$ существует бесконечно много первообразных, т. е. первообразная однозначно не определена. Соответственно, число $\int_a^b f(x)dx$ по аналогии называют **определенным интегралом**, так как это вполне конкретное число. Заметим, что по определению первообразной (неопределенного интеграла) **справедливо равенство** $(\int f(x)dx)' = f(x)$. В связи с введением новой терминологии в новых обозначениях приведем **правила интегрирования и таблицу интегралов.**

Правила интегрирования

1. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ – интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций.

2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ – интеграл от произведения числа и функции равен произведению числа на интеграл от функции.

3. $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}\int f(t)dt$, где $t = kx + b$ (фактически, это простейший частный случай замены переменных, о чем будет детально рассказано на следующих уроках).

Разумеется, приведенные правила интегрирования полностью согласуются с изложенными ранее.

Таблица интегралов

Функция $f(x)$	k (постоянная)	x^n $(n \neq -1)$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Интеграл $\int f(x)dx$	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Функция $f(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
Интеграл $\int f(x)dx$	$\arcsin x+C$; $-\arccos x+C$	$\operatorname{arctg} x+C$; $-\operatorname{arcctg} x+C$

Рассмотрим применение формулы Ньютона – Лейбница.

Пример 2

Вычислим $\int\limits_0^{\pi/2}(x^2+\cos x)dx$.

Сначала найдем неопределенный интеграл: $\int(x^2+\cos x)dx = \dfrac{x^3}{3}+\sin x$, затем определенный интеграл: $\int\limits_0^{\pi/2}(x^2+\cos x)dx = \left(\dfrac{x^3}{3}+\sin x\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^3+\sin\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{0^3}{3}+\sin 0\right)=\dfrac{\pi^3}{24}+1.$

В этом примере и далее было принято **общепринятое обозначение**: разность первообразных $F(b)-F(a)$ записывалась в виде $F(x)\big|_a^b$. Тогда формула Ньютона – Лейбница принимает вид $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b$.

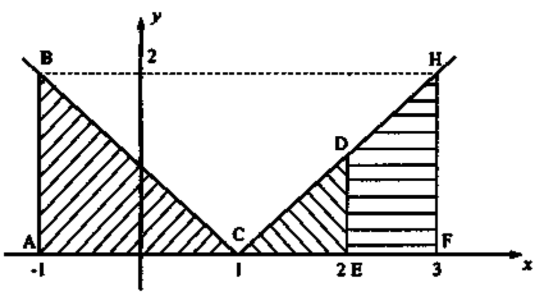
Очень часто при вычислении определенных интегралов полезно использовать их **геометрический смысл – площадь** соответствующей **криволинейной трапеции**.

Пример 3

Используя геометрический смысл интеграла, вычислим:

а) $\int\limits_{-1}^{2}|x-1|dx$;   б) $\int\limits_{2}^{3}|x-1|dx$.

Построим график подынтегральной функции $f(x)=|x-1|$.



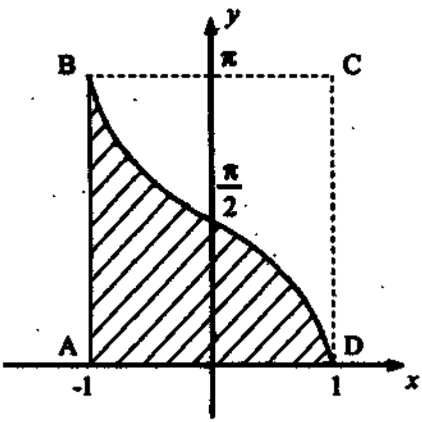
а) Видно, что значение данного интеграла равно площади многоугольника $ABCDE$, состоящего из двух прямоугольных равнобедренных треугольников: ABC ($AB = AC = 2$) и CDE ($CE = DE = 1$). Тогда $\int_{-1}^{2}|x-1|dx = \frac{1}{2}AB\cdot AC + \frac{1}{2}CE\cdot DE = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = 2 + \frac{1}{2} = 2{,}5.$

б) Значение данного интеграла равно площади трапеции $EDHF$ с основаниями $ED = 1$ и $HF = 2$ и высотой $EF = 1$. Поэтому $\int_{2}^{3}|x-1|dx = \frac{ED+HF}{2}\cdot EF = \frac{1+2}{2}\cdot 1 = 1{,}5.$

Пример 4

Используя геометрический смысл интеграла, вычислим $\int_{-1}^{1}\arccos x\,dx.$

Построим график подынтегральной функции $f(x) = \arccos x$. Также построим прямоугольник $ABCD$ с измерениями $AD = 2$ и $AB = \pi$ и площадью $S = AD\cdot AB = 2\pi$.



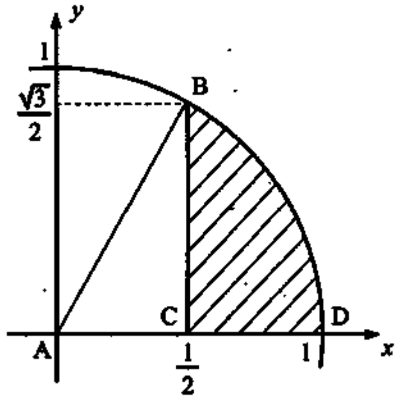
Видно, что площадь криволинейной трапеции ABD составляет ровно половину площади прямоугольника $ABCD$. Поэтому $\int_{-1}^{1}\arccos x\,dx = \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi.$

Пример 5

Используя геометрический смысл интеграла, вычислим:

а) $\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$;   б) $\int_{0,5}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Построим график подынтегральной функции $y=\sqrt{1-x^2}$.



Очевидно, что $y \geq 0$. Возведем обе части равенства в квадрат: $y^2=1-x^2$ или $x^2+y^2=1$. Получили уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом 1. Поэтому с учетом условия $y \geq 0$ графиком данной функции является верхняя полуокружность.

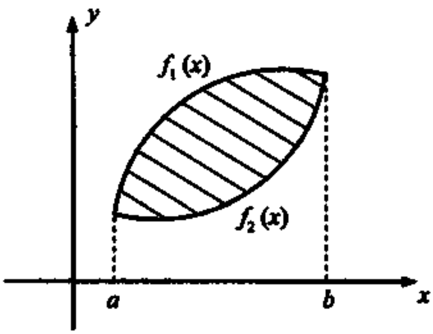
а) Значение данного интеграла равно площади четверти круга радиусом 1. Поэтому $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi R^2=\frac{1}{4}\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{4}$.

б) Значение этого интеграла равно площади криволинейной трапеции BCD. Эта площадь равна разности площади сектора ABD (с углом $\frac{\pi}{3}$) $S_{ABD}=\frac{1}{2}R^2\cdot\alpha=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$ и площади прямоугольного треугольника ABC $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$. Поэтому значение данного интеграла $\int\limits_{0,5}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Заметим, что в примерах 4 и 5 были найдены соответствующие определенные интегралы исходя из геометрического смысла. В то же время нахождение аналогичных неопределенных интегралов представляет достаточно серьезную задачу. Кроме того, эти интегралы и выглядят сложно, например: $\int \arccos x\,dx=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$ и $\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)$. Таким образом, геометрический смысл определенного интеграла во многих задачах очень полезен при его вычислении.

Так как понятие определенного интеграла в первую очередь связано с вычислением площади криволинейной трапеции, то остановимся подробнее на нахождении площадей плоских фигур. Условно можно выделить несколько характерных типов таких задач.

1) Площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, при условии $f_1(x) \geq f_2(x)$.

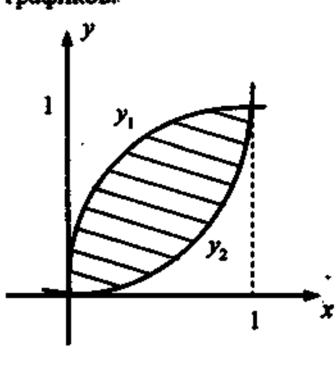


Пусть графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ пересекаются в точках $x = a$ и $x = b$ и на отрезке $[a; b]$ выполнено неравенство $f_1(x) \geq f_2(x)$. Тогда площадь заштрихованной фигуры, ограниченной графиками данных функций, равна $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$.

Пример 6

Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y_1 = \sqrt{x}$ и $y_2 = x^2$.

Построим графики данных функций $y_1 = \sqrt{x}$ и $y_2 = x^2$ и найдем точки пересечения этих графиков.



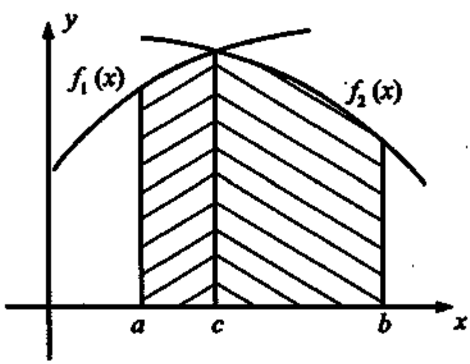
Получаем уравнение: $\sqrt{x}=x^2$, или $x=x^4$, или $0=x(x^3-1)$. Корни этого уравнения $x_1=0$ и $x_2=1$. На промежутке [0; 1] выполнено неравенство $y_1 \ge y_2$. Тогда площадь заштрихованной фигуры равна

$$S=\int_0^1(y_1-y_2)dx=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2}}-x^2\right)dx=\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\cdot1^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\cdot1^3\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot0^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\cdot0^3\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

2) Площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на отрезке $[a; b]$.

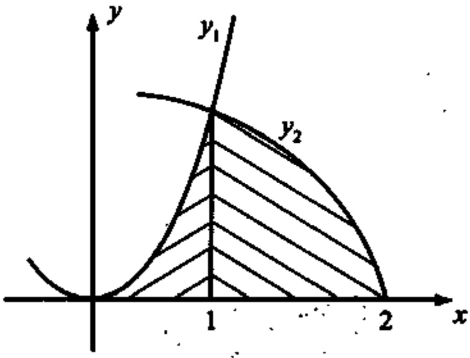
Пусть графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ пересекаются в точке $c\in[a; b]$. Тогда верхняя граница криволинейной трапеции представляет собой две различные линии $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Поэтому площадь заштрихованной фигуры равна $S=\int_a^c f_1(x)dx+\int_c^b f_2(x)dx.$



Пример 7

Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y_1=x^2$, $y_2=\sqrt{2-x}$, $y=0$ и расположенной в первой четверти.

Построим графики функций $y_1=x^2$ и $y_2=\sqrt{2-x}$ и найдем их точку пересечения.

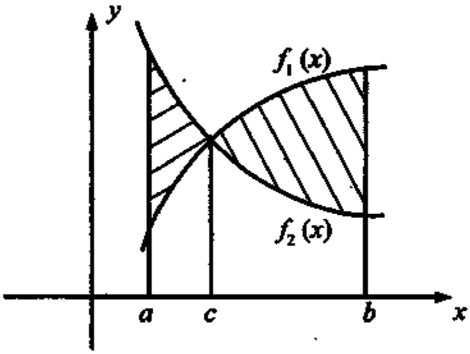


Получаем уравнение: $x^2=\sqrt{2-x}$, или $x^4=2-x$, или $(x-1)(x^3+x^2+x+2)=0$. Очевидно, что такое уравнение при $x\geq 0$ имеет только один корень: $x=1$. Тогда площадь заштрихованной фигуры равна $S=\int\limits_0^1 y_1dx+\int\limits_1^2 y_2dx=\int\limits_0^1 x^2dx+\int\limits_1^2 (2-x)^{\frac{1}{2}}dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1-\left.\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}\right|_1^2=$

$=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}-\frac{2}{3}(2-2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}(2-1)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1.$

3) Площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ различной величины на отрезке $[a; b]$.

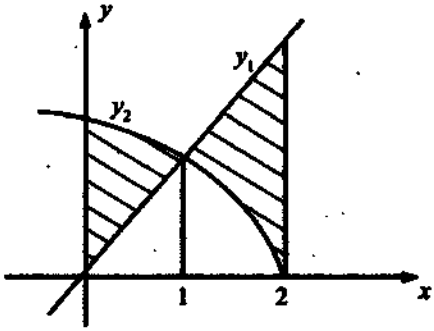
Фактически этот тип задач – сочетание двух предыдущих разновидностей. Найдем площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$. Пусть графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ пересекаются в точке $c\in[a; b]$. Тогда площадь заштрихованной фигуры равна $S=\int\limits_a^c (f_2(x)-f_1(x))dx+\int\limits_c^b (f_1(x)-f_2(x))dx.$



Пример 8

Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y_1 = x$, $y_2 = \sqrt{2-x}$, $x = 0$, $x = 2$.

Нарисуем заданную фигуру и найдем точку пересечения графиков функции y_1 и y_2.



Получаем уравнение: $x = \sqrt{2-x}$ или $x^2 + x - 2 = 0$. На промежутке $[0;\ 2]$ это уравнение имеет единственный корень: $x = 1$. Найдем площадь заштрихованной фигуры. Она равна $S = \int\limits_0^1 (y_2 - y_1)dx +$

$$+\int\limits_1^2 (y_1 - y_2)dx = \int\limits_0^1 \left((2-x)^{\frac{1}{2}} - x\right)dx + \int\limits_1^2 \left(x - (2-x)^{\frac{1}{2}}\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^2 = \left(-\frac{2}{3}(2-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1^2}{2}\right) -$$

$$-\left(-\frac{2}{3}(2-0)^{\frac{3}{2}} - \frac{0^2}{2}\right) + \left(\frac{2^2}{2} + \frac{2}{3}(2-2)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}(2-1)^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= -\frac{5}{6} + \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} + 2 - \frac{5}{6} = \frac{4\sqrt{2}+1}{3}.$$

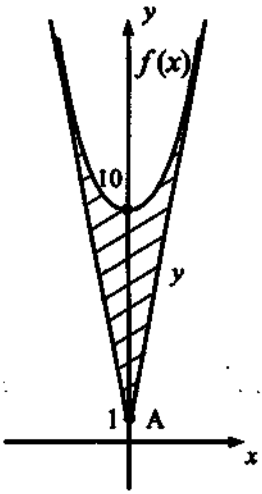
4) Прочие типы задач.

К этой разновидности отнесем задачи с несколько **нестандартными условиями**. Несмотря на это, подобные задачи решаются **теми же способами**. Может быть, понадобится более широкое привлечение дополнительных сведений.

Пример 9

Найдем площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2 + 10$ и касательными к этому графику, проведенными из точки $A(0;\ 1)$.

Построим заданную фигуру.



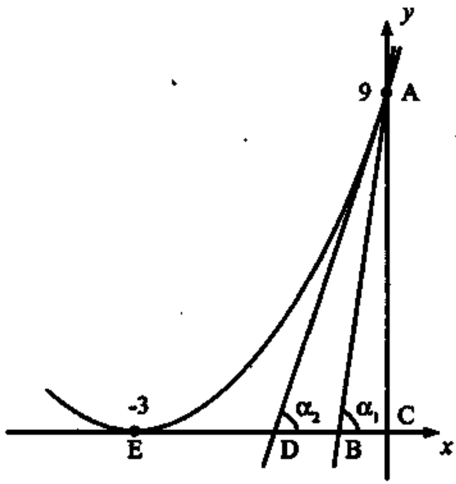
Очевидно, что такая фигура симметрична относительно оси ординат. Поэтому достаточно найти сначала площадь половины этой фигуры. Прежде всего получим уравнение касательной. Пусть касание происходит в точке x_0. Найдем производную $f'(x)=2x$ и значения функции и производной в точке x_0 и получим: $f'(x_0)=2x_0$ и $f(x_0)=x_0^2+10$. Запишем уравнение касательной: $y=2x_0(x-x_0)+x_0^2+10$ и $y=2x_0x-x_0^2+10$. Так как касательная проходит через точку $A(0;\ 1)$, то получаем уравнение $1=-x_0^2+10$, откуда $x_0=\pm3$. Тогда уравнение касательных $y=\pm6x+1$. Найдем площадь заданной фигуры: $S=2\int\limits_0^3(f(x)-y)dx=$

$$=2\int\limits_0^3(x^2+10-(6x+1))dx=2\int\limits_0^3(x^2-6x+9)dx=2\int\limits_0^3(x-3)^2dx=\frac{2}{3}(x-3)^3\Big|_0^3=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot0^3-\frac{2}{3}\cdot(-3)^3=18.$$

Пример 10

Фигура ограничена графиком функции $f(x)=(x+3)^2$ и прямыми $x=0$ и $y=0$. Под какими углами к оси абсцисс надо провести две прямые через точку $A(0;\ 9)$, чтобы они разбили фигуру на три равновеликие части?

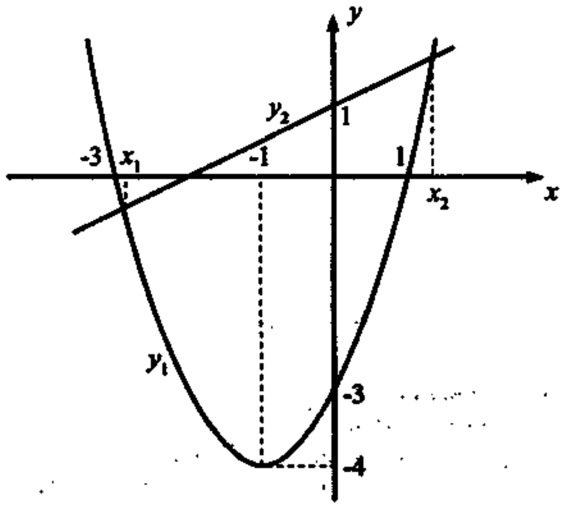


Сначала найдем площадь криволинейной трапеции ACE и получим: $\int\limits_{-3}^{0}(x+3)^2\,dx=\left.\dfrac{(x+3)^3}{3}\right|_{-3}^{0}=\dfrac{3^3}{3}-\dfrac{0^3}{3}=9$. Значит, каждая равновеликая часть фигуры будет иметь площадь 3. Тогда $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot BC=3$, откуда $BC=\dfrac{2}{3}$. Найдем $\operatorname{tg}\alpha_1=\dfrac{AC}{BC}=$ $=\dfrac{9}{\frac{2}{3}}=\dfrac{27}{2}$ и $\alpha_1=\operatorname{arctg}\dfrac{27}{2}$.

Площадь $S_{ADC}=2\cdot 3=6$, поэтому $6=\dfrac{1}{2}AC\cdot DC=\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot DC$, откуда $DC=\dfrac{4}{3}$. Теперь найдем $\operatorname{tg}\alpha_2=\dfrac{AC}{DC}=\dfrac{9}{\frac{4}{3}}=\dfrac{27}{4}$ и $\alpha_2=\operatorname{arctg}\dfrac{27}{4}$.

Пример 11

Найдите наименьшее значение площади фигуры, ограниченной параболой $y_1=x^2+2x-3$ и прямой $y_2=ax+1$. При каком значении параметра a оно достигается?



Пусть графики данных функций пересекаются в точках x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$). При всех $x \in [x_1; x_2]$ выполнено неравенство $y_1 \le y_2$. Тогда площадь заданной фигуры $S = \int\limits_{x_1}^{x_2} (y_2 - y_1)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} (ax + 1 - x^2 - 2x + 3)dx =$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} (-x^2 + (a-2)x + 4)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{(a-2)x^2}{2} + 4x \right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}.$$

Точки пересечения x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 + 2x - 3 =$ $= ax + 1$ или $x^2 + (2-a)x - 4 = 0$ и равны $x_{1,2} = \dfrac{a - 2 \pm \sqrt{(a-2)^2 + 16}}{2}$.

Понятно, что подставить такие пределы интегрирования в выражение для площади S нереально. Поэтому воспользуемся формулами Виета: $x_1 + x_2 = a - 2$ и $x_1x_2 = -4$. Найдем необходимые для вычисления комбинации корней: $x_2 - x_1 = \ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{(a-2)^2 + 16}$ и $x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = (a-2)^2 + 4$.

Теперь преобразуем выражение для площади S к более удобному виду: $S = -\dfrac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) + \dfrac{a-2}{2}(x_2^2 - x_1^2) + 4(x_2 - x_1) =$

$$= (x_2 - x_1)\left(-\frac{1}{3}(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) + \frac{a-2}{2}(x_2 + x_1) + 4 \right) =$$

$$=\sqrt{(a-2)^2+16}\left(-\frac{(a-2)^2+4}{3}+\frac{(a-2)^2}{2}+4\right)=\sqrt{(a-2)^2+16}\cdot\frac{(a-2)^2+16}{6}=$$

$$=\frac{1}{6}((a-2)^2+16)^{\frac{3}{2}}.$$

Очевидно, что наименьшее значение площадь S принимает при $a=2$ и оно равно $S(2)=\frac{1}{6}\cdot16^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}(2^4)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\cdot2^6=\frac{2^5}{3}=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}$.

IV. Задание на уроках

№ 357 (а, б); 358 (а, г); 359 (в); 360 (г); 361 (в); 362 (б); 363 (а, г); 365 (а); 366 (б); 367; 369 (а).

V. Контрольные вопросы

1. Поясните понятие определенного интеграла.
2. Приведите формулу Ньютона – Лейбница.
3. Какова связь между первообразной и неопределенным интегралом?

VI. Задание на дом

№ 357 (в, г); 358 (б, в); 359 (б); 360 (в); 361 (г); 362 (г); 363 (б); 364 (г); 365 (г); 366 (а); 368; 369 (б).

VII. Творческие задания

1. При каких значениях параметра a выполнено условие:

а) $\int\limits_3^a (x-5)dx=6$; б) $\int\limits_1^a \sqrt{3x+1}dx=\frac{61}{36}$; в) $\int\limits_3^a (x-5)dx<6$;

г) $\int\limits_0^3 (2-4x+3x^2)dx\le a$; д) $\int\limits_1^2 (a^2+(4-4a)x+4x^3)dx\le 12$.

Ответы: а) 1 и 9; б) $\frac{7}{4}$; в) (1; 9); г) $(-\infty;\,0]\cup\{1\}$; д) 3.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\begin{cases}2\cos x \text{ при } -\frac{\pi}{2}\le x\le 0\\ -x+2 \text{ при } 0<x\le 2\end{cases}$ и $y=0$;

б) $y=\begin{cases}x+2 \text{ при } -2\le x\le 0\\ 2\cos x \text{ при } 0<x\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$ и $y=0$.

Ответы: а, б) 4.

3. Найдите площадь фигуры, заданной неравенством:

а) $|y|+\frac{1}{2}\le\sqrt{1-|x|}$; б) $|x^2+y^2-2|\le 2(x+y)$;

в) $|y|+2|x|=x^2+1$; г) $x^2+y^2\le 2(|x|+|y|)$.

Ответы: а) $\frac{5}{6}$; б) $2\pi+4$; в) $\frac{4}{3}$; г) $4\pi+8$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^2+x+1$, касательной к ней, проведенной в точке $A(1;3)$, и прямой $x=-1$.

Ответ: $\frac{7}{6}$.

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-2x+2$, касательной к ней в точке $A(3;5)$ и осью ординат.

Ответ: 9.

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sqrt{2x+1}$ и прямой, проходящей через точки $A(2;2)$ и $B(4;3)$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

7. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sqrt{2-x}$ и прямой, проходящей через точки $A(1;1)$ и $B(-5;3)$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

8. Вычислите интегралы, используя их геометрический смысл:

а) $\int\limits_{-2}^{1}\big||x|-1\big|dx$; б) $\int\limits_{-1}^{3}\big||x|-1\big|dx$;

в) $\int\limits_{-3}^{3}(3-\sqrt{9-x^2})dx$; г) $\int\limits_{-2}^{2}(3+\sqrt{4-x^2})dx$.

Ответы: а) $\frac{3}{2}$; б) 3; в) $18-4{,}5\pi$; г) $12+2\pi$.

VIII. Подведение итогов уроков

Уроки 16–17. Методы интегрирования (факультативное занятие)

Цель: изучить другие способы интегрирования функций.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=2x-x^2-1$ и $y=0$;

б) $y=2x^2$, касательной к этой кривой, проведенной в точке $A(2;\ 8)$, и осями абсцисс.

Вариант 2

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=3x+18-x^2$ и $y=0$;

б) $y=x^2+3$, касательной к этой кривой, проведенной в точке $A(2;\ 7)$ и осями координат.

III. Изучение нового материала

Для дальнейшего изложения материала (применение интегралов в математике и физике) необходимо расширить школьные знания. Поэтому надо прежде всего рассмотреть другие способы интегрирования функций. Эти способы не входят в школьную программу, и лучше изложить материал факультативно. Изучим методы интегрирования (без их доказательства).

1. Непосредственное (табличное) интегрирование

Фактически этот способ единственный, который изучается в школе и был использован нами ранее при решении задач. Для его использования требуются только правила интегрирования и таблица интегралов. Рассмотрим еще несколько задач.

Пример 1

Вычислим $I=\int x^2\sqrt{x\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Сначала преобразуем подынтегральное выражение: $x^2\sqrt{x\sqrt[3]{x}}=$ $=x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{8}{3}}$. Теперь вычислим интеграл: $I=\int x^{\frac{8}{3}}dx=$

$$=\frac{x^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}}+C=\frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}}+C.$$

Пример 2

Вычислим $I=\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

Преобразуем подынтегральную функцию: $\operatorname{tg}^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=$ $=\frac{1}{\cos^2 x}-1$. Тогда искомый интеграл $I=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$ $=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\operatorname{tg}x-x+C.$

Пример 3

Вычислим $I=\int\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}dx.$

Вновь упростим подынтегральную функцию, используя формулу приведения:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}.$$

Данный интеграл $I=\int\frac{dx}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+C.$

Пример 4

Вычислим $I=\int\frac{3x^4+x^3+4x^2+x+5}{x^2+1}dx.$

Разделив числитель на знаменатель дроби, выделим в дроби целую часть. Тогда данный интеграл имеет вид $I=\int\left(3x^2+x+1+\frac{4}{x^2+1}\right)dx=x^3+\frac{x^2}{2}+x+4\operatorname{arctg}x+C.$

Заметим, что рассмотренный способ применяется только для достаточно простых задач.

2. Замена переменной интегрирования

Во многих случаях при нахождении интегралов приходится вводить новую переменную. Если для интеграла $\int f(x)dx$ ввести переменную $x=\varphi(t)$, то $dx=\varphi'(t)dt$ и $\int f(x)dx=\int f(\varphi)\cdot\varphi'(t)dt$.

Пример 5

Вычислим $\int\cos(3x+5)dx$.

Введем новую переменную t следующим образом: $3x+5=t$, откуда $x=\frac{t-5}{3}$ и $dx=\left(\frac{t-5}{3}\right)'dt=\frac{1}{3}dt$. Получаем: $\int\cos(3x+5)dx=$ $=\int\cos t\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int\cos t\,dt=\frac{1}{3}\sin t+C$. Теперь нужно вернуться к старой переменной x. Имеем: $\frac{1}{3}\sin t+C=\frac{1}{3}\sin(3x+5)+C$. Фактически для данного примера в частном случае было получено третье правило интегрирования.

Пример 6

Вычислим $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Преобразуем подынтегральную функцию: $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x+x^2)}}=$ $=\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$. Введем новую переменную $t=x-1$, откуда $x=t+1$ и $dx=(t+1)'dt=1\cdot dt=dt$. Тогда интеграл имеет вид $I=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$ $=\arcsin t+C$. Вернемся к старой переменной и получим: $I=\arcsin(x-1)+C$.

Заметим, что в примерах 5 и 6 была использована **линейная замена переменной**, т. е. переменные (старая и новая) были связаны линейным соотношением. Поэтому **легко** можно было **выразить одну переменную через другую**. Чаще всего встречается другая ситуация – **связь** между переменными **сложная** и **не просто выразить новую переменную через старую**. Как будет видно далее, во многих случаях это и не надо. При этом **алгоритм действий остается прежним.** Помните, что **если** $t=\varphi(x)$, **то** $dt=\varphi'(x)dx$.

Пример 7

Вычислим $I=\int \cos x \sin^7 x\,dx$.

Введем новую переменную $t=\sin x$, тогда $dt=(\sin x)'dx=$ $=\cos x\,dx$. Поэтому данный интеграл сводится к виду $I=\int \sin^7 x(\cos x\,dx)=\int t^7 dt=\frac{t^8}{8}+C=\frac{\sin^8 x}{8}+C.$

Еще раз напомним, что всегда **обязательно надо возвращаться к старой переменной.**

Пример 8

Вычислим $I=\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+3}}.$

Введем новую переменную $t=x^2+x+3$, тогда $dt=(x^2+x+3)'dx=$ $=(2x+1)dx$. После этого интеграл принимает вид $I=\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=$

$$=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{x^2+x+3}+C.$$

Пример 9

Вычислим $I=\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$

Введем новую переменную $t=\operatorname{tg} x$, тогда $dt=(\operatorname{tg} x)'dx=\frac{1}{\cos^2 x}dx=$ $=\frac{dx}{\cos^2 x}$. Учтем формулу тригонометрии $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x=1+t^2$. Тогда интеграл имеет вид $I=\int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int(1+t^2)dt=t+\frac{t^3}{3}+C=$ $=\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C.$

Пример 10

Вычислим $I=\int \frac{\operatorname{arctg}^3 3x}{1+9x^2}dx.$

Введем новую переменную $t = \operatorname{arctg} 3x$, тогда $dt = (\operatorname{arctg} 3x)' dx = \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3dx = \frac{3dx}{1+9x^2}$. При этом интеграл принимает вид $I = \frac{1}{3}\int \operatorname{arctg}^3 3x \cdot \frac{3dx}{1+9x^2} = \frac{1}{3}\int t^3 dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^4}{4} + C = \frac{\operatorname{arctg}^4 3x}{12} + C.$

Заметим, что при использовании этого метода интегрирования основной **сложностью** является **выбор новой переменной**. Для подобного выбора существуют **определенные рекомендации**, но для их изложения понадобится несколько уроков (что мы позволить себе не можем). Кроме того, при интегрировании даже простых иррациональных функций **новая переменная вводится** достаточно **сложным образом** (подстановки Эйлера). Поэтому в основном рассчитывайте на свои навыки и интуицию.

3. Разложение подынтегральной функции в сумму

Так как не существует формулы интегрирования для произведения или частного функций, то (по возможности) надо **представить подынтегральную функцию в виде суммы функций**. Для этого используют различные приемы, которые рассмотрим на примерах.

В случае подынтегральной функции, представляющей собой дробь, в основном используется **почленное деление**.

Пример 11

Вычислим $I = \int \frac{2x^3 - 5\sin^2 x}{x^3 \sin^2 x} dx.$

Почленно разделив числитель на знаменатель дроби, сведем интеграл к виду $I = \int\left(\frac{2x^3}{x^3\sin^2 x} - \frac{5\sin^2 x}{x^3 \sin^2 x}\right)dx = \int\left(\frac{2}{\sin^2 x} - 5x^{-3}\right)dx = -2\operatorname{ctg} x - 5\frac{x^{-2}}{-2} + C = -2\operatorname{ctg} x + 2{,}5\cdot\frac{1}{x^2} + C.$

Пример 12

Вычислим $I = \int \frac{3 - 4\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx.$

Вновь используем тот же прием и запишем интеграл в виде $I = \int\left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{4\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\right)dx = \int\left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{4}{\sin^2 x}\right)dx = 3\operatorname{tg} x + 4\operatorname{ctg} x + C.$

Пример 13

Вычислим $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3}}.$

Представим числитель дроби в виде разности квадратов. Имеем:

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{4dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}}=\frac{1}{4}\int\frac{(x+1)-(x-3)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}}dx=\frac{1}{4}\int(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3})dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{(x-3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)+C=\frac{1}{6}\left((x+1)^{\frac{3}{2}}+(x-3)^{\frac{3}{2}}\right)+C.$$

Заметим, что эту задачу можно решить, избавившись от иррациональности в знаменателе дроби.

Произведение функций встречается в основном в случае тригонометрических функций. Можно рекомендовать использовать формулы преобразования произведения функций в сумму:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta));$$

а также формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2};\ \ \cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2};\ \ \sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin2\alpha}{2}.$$

Пример 14

Вычислим $I=\int\cos7x\cdot\cos3x\,dx$.

Преобразуем произведение косинусов в сумму функций. Получаем: $I=\int\frac{1}{2}(\cos4x+\cos10x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin4x}{4}+\frac{\sin10x}{10}\right)+C=\frac{1}{8}\sin4x+$ $+\frac{1}{20}\sin10x+C.$

Пример 15

Вычислим $I=\int\cos^4x\,dx$.

Используем формулу понижения степени и преобразуем подынтегральную функцию: $\cos^4x=\left(\frac{1+\cos2x}{2}\right)^2=\frac{1+2\cos2x+\cos^2 2x}{4}=$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$ Тогда интеграл имеет вид: $I=\int\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx=\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 4x}{4}+$ $+C=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

В ряде случаев полезно еще использовать и **замену переменной.**

Пример 16

Вычислим $\int\sin^5 x\cos^4 x\,dx.$

Преобразуем подынтегральную функцию и получим: $I=\int\sin^4 x\cos^4 x\sin x\,dx=\int(1-\cos^2 x)^2\cos^4 x\sin x\,dx=$ $=\int(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\cos^4 x\sin x\,dx=\int(\cos^4 x-2\cos^6 x+\cos^8 x)\sin x\,dx.$

Теперь введем новую переменную $t=\cos x,$ тогда $dt=-\sin x\,dx.$ Интеграл имеет вид $I=-\int(t^4-2t^6+t^8)dt=-\frac{t^5}{5}+2\frac{t^7}{7}-\frac{t^9}{9}+C=$ $=-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{1}{9}\cos^9 x+C.$

4. Интегрирование по частям

Изложим суть этого метода. Известна формула для произведения функций $(UV)'=U'V+UV'$. Умножим обе части этого равенства на dx и получим $(UV)'dx=U'Vdx+UV'dx,$ тогда $\int(UV)'dx=$ $=\int U'Vdx+\int UV'dx$ или $UV=\int U'Vdx+\int UV'dx$. Из этого выражения имеем $\int UV'dx=UV-\int U'Vdx$ или $\int UdV=UV-\int VdU$. Эта формула называется **формулой интегрирования по частям.** Суть ее состоит в том, что **один интеграл** $\int UV'dx$ (или $\int UdV$) **выражается через другой** $\int U'Vdx$ (или $\int VdU$). Функции U и V выбирают таким образом, чтобы второй интеграл оказался проще, чем первый исходный.

Пример 17

Вычислим $I=\int x\sin 2x\,dx.$

Будем считать, что $U=x$ и $dV=\sin 2x\,dx.$ Тогда получаем: $dU=dx$ и $V=\int\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x.$ Используем формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$. Имеем: $\int x\sin 2x\,dx = x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) -$

$-\int -\frac{1}{2}\cos 2x\,dx = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

Пример 18

Вычислим $I = \int x \operatorname{arctg} x\,dx$.

Будем считать, что $U = \operatorname{arctg} x$ и $dV = xdx$. Тогда получаем: $dU = (\operatorname{arctg} x)'dx = \frac{dx}{1+x^2}$ и $V = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$. Используем формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$. Имеем: $\int x \operatorname{arctg} x\,dx =$ $= \operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2}$. Осталось посчитать последний интеграл. Сделаем это отдельно: $\int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx =$ $= \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x)$. Теперь получаем искомый интеграл $I = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) + C = \frac{1}{2}(1+x^2)\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$

Рассмотренный метод используется для вполне определенных функций. В интегралах $\int P(x)\sin ax\,dx$, $\int P(x)\cos ax\,dx$ (где $P(x)$ – многочлен) полагают $U = P(x)$, а $\sin ax\,dx$ или $\cos ax\,dx - dV$. В интегралах $\int P(x)\arcsin ax\,dx$, $\int P(x)\arccos ax\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} ax\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} ax\,dx$ полагают $U = V$ – обратной тригонометрической функции, а $dV = P(x)dx$. Заметим, что этот метод своеобразный, но полезный, так как подобные интегралы другими способами не вычисляются.

В заключение отметим, что рассмотренные методы интегрирования и примеры – лишь первое приближение в изучаемом материале. Вычисление интегралов является серьезной и сложной задачей.

IV. Задание на уроках и на дом

1. Непосредственное интегрирование:

а) $\int (3-2x)^2 dx$; б) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(5x - \frac{\pi}{3}\right)}$; в) $\int \sqrt{4x-1}\,dx$;

г) $\int \sqrt[7]{5-6x}\,dx$; д) $\int x\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$; е) $\int \left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

ж) $\int \frac{7x^5+2x^4+3x^2-5x+1}{\sqrt{x}}\,dx$; з) $\int \left(\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)dx$.

2. Замена переменной интегрирования:

а) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$; б) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int x^2\sqrt[7]{4+x^3}\,dx$;

г) $\int \frac{(6x+1)dx}{\sqrt{3x^2+x-5}}$; д) $\int \frac{(\cos x+\sqrt{3}\sin x)}{\cos^3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}dx$; е) $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$;

ж) $\int \cos^7 x\sin x\,dx$; з) $\int \sin^4 x\cos x\,dx$; и) $\int \frac{(\cos x+\sin x)dx}{(\sin x-\cos x+3)^4}$;

к) $\int \sqrt[5]{\sin x+\cos x+5}(\cos x-\sin x)dx$; л) $\int \frac{\sin^2 x+3\cos^2 x}{\cos^4 x}dx$.

3. Разложение подынтегральной функции в сумму:

а) $\int \frac{x^4+4x^2+3}{x^2+3}dx$; б) $\int \frac{3x^3-4x^2+3x-2}{x-1}dx$; в) $\int \frac{x^4+4x^2+7}{x^2+1}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}}$; е) $\int \sin^2 6x\,dx$;

ж) $\int \cos^4 2x\,dx$; з) $\int \sin^5 3x\,dx$; и) $\int \cos^3 7x\,dx$;

к) $\int \sin 5x\sin x\,dx$; л) $\int \cos 9x\cos 3x\,dx$; м) $\int \sin 6x\cos 2x\,dx$;

н) $\int \sin^2 7x\cos x\,dx$; о) $\int \cos^2 5x\cos 3x\,dx$; п) $\int \sin^3 4x\cos^2 x\,dx$.

4. Интегрирование по частям:

а) $\int x\sin x\,dx$; б) $\int x\cos^2 3x\,dx$; в) $\int x^2\sin 2x\,dx$;

г) $\int \arcsin x\,dx$; д) $\int \arccos x\,dx$; е) $\int x\arcsin 2x\,dx$;

ж) $\int (\arccos x)^2 dx$; з) $\int x\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$.

V. Подведение итогов уроков

Уроки 18–19. Свойства определенных интегралов (факультативное занятие)

Цель: рассмотреть свойства определенных интегралов, полезные при решении задач.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Используя различные методы, вычислите интегралы:

а) $\int \frac{3x^3-2x^2-7x-2}{x-2}dx$;

б) $\int \frac{6x+7}{\sqrt[3]{3x^2+7x+5}}dx$;

в) $\int \sin 5x \cos 3x \, dx$.

Вариант 2

Используя различные методы, вычислите интегралы:

а) $\int \frac{7x^3+4x^2+8x+11}{x+1}dx$;

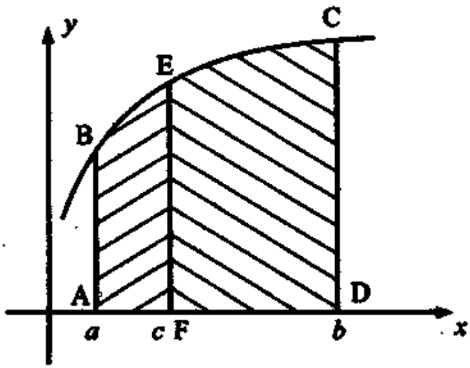
б) $\int \frac{8x-5}{\sqrt[5]{4x^2-5x+3}}dx$;

в) $\int \cos 8x \cos 3x \, dx$.

III. Изучение нового материала

Данная тема в школе вообще не изучается. Вместе с тем ее знание полезно как для лучшего понимания определенного интеграла, так и для решения задач. Рекомендуем эту тему рассмотреть факультативно (на уровне общего понимания). Обсудим свойства определенных интегралов для непрерывной функции $f(x)$.

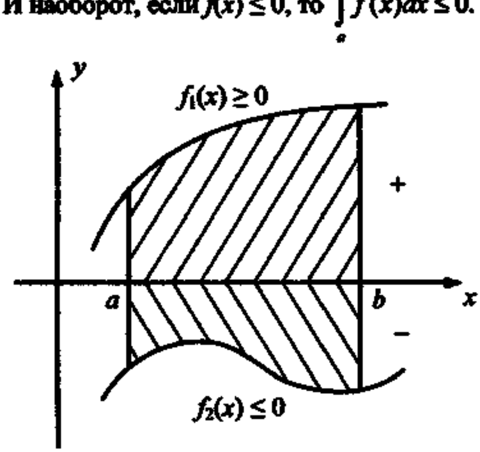
Свойство 1. Если $a<c<b$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.



Геометрический смысл этого свойства очевиден: площадь *ABCD* равна сумме площадей фигур *ABEF* и *FECD*. Это свойство было использовано ранее при вычислении площадей фигур.

Свойство 2. Справедливо равенство $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Оно следует из понятия определенного интеграла. Предположим, что $a < b$. Тогда для первого интеграла величина $\Delta x > 0$, для второго – величина $\Delta x < 0$.

Свойство 3. Если для каждого $x \in [a, b]$ значения $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. И наоборот, если $f(x) \leq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.



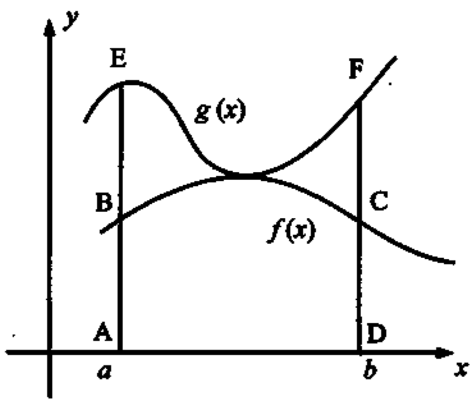
Это свойство также следует из понятия определенного интеграла. При составлении интегральной суммы величина $\Delta x > 0$ и знак суммы определяется знаком $f(x)$.

Пример 1

Определим знак числа $\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{4+x^2}\cos^3 x\cdot\arcsin x\,dx$.

На промежутке $[-1;\,0]$ множители $\sqrt{4+x^2}>0$, $\cos x>0$, $\arcsin x\le 0$ (причем равенство достигается в одной точке $x=0$). Тогда подынтегральная функция $f(x)<0$ на промежутке $[-1;\,0)$ и только в точке $x=0$ значение $f(x)=0$. Поэтому данное число отрицательное.

Свойство 4. Если для всех $x\in[a;\,b]$ $f(x)\le g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b g(x)dx$.



Это свойство имеет наглядный геометрический смысл. Видно, что площадь криволинейной трапеции *ABCD* не больше площади криволинейной трапеции *AEFD*.

Пример 2

Сравним числа $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3 x\,dx$ и $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^8 x\,dx$.

Так как $\cos^3 x>\cos^8 x$ на промежутке $\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)$ и $\cos^3 x=\cos^8 x$ только при $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$, то $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3 x\,dx>\int\limits_0^{\pi/2}\cos^8 x\,dx$.

Пример 3

Докажем для $x\ge 0$ неравенство $1-\frac{x^2}{2}\le\cos x\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$.

а) Сначала докажем левую часть неравенства.

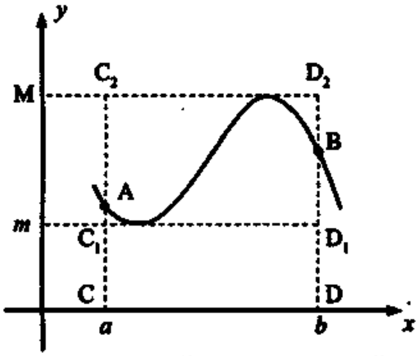
Для $t \ge 0$ выполнено неравенство $\sin t \le t$. Поэтому по свойству 4 $\int\limits_0^x \sin t\,dt \le \int\limits_0^x t\,dt$, или $(-\cos t)\Big|_0^x \le \frac{t^2}{2}\Big|_0^2$, или $-(\cos x - 1) \le \frac{x^2}{2}$, откуда $1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x$. Левая часть неравенства доказана.

б) Теперь докажем правую часть неравенства. Воспользуемся уже доказанной частью неравенства $\cos t \ge 1 - \frac{t^2}{2}$. По свойству 4 получаем: $\int\limits_0^x \cos t\,dt \ge \int\limits_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)dt$, или $\sin t\Big|_0^x \ge \left(t - \frac{t^3}{6}\right)\Bigg|_0^x$, или $\sin x \ge x - \frac{x^3}{6}$.

Еще раз проделаем эту процедуру. Из неравенства $\sin t \ge t - \frac{t^3}{6}$ получаем: $\int\limits_0^x \sin t\,dt \ge \int\limits_0^x \left(t - \frac{t^3}{6}\right)dt$, или $(-\cos t)\Big|_0^x \ge \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24}\right)\Bigg|_0^x$, или $-(\cos x - 1) \ge \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$, откуда $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \ge \cos x$. Итак, и правая часть неравенства доказана.

Таким образом, доказано неравенство $1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. По сути дела, было получено и неравенство $x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$. Эти неравенства могут служить для оценок $\cos x$ и $\sin x$. Например, при x = 1 радиану ($\approx 57°$) имеем $\frac{1}{2} \le \cos x \le \frac{13}{24}$ (точность ~8%) и $\frac{5}{6} \le \sin x \le 1$ (точность ~16%). Понятно, что, действуя аналогично, можно повысить точность оценок.

Свойство 5. Если для всех $x \in [a;b]$ $m \le f(x) \le M$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

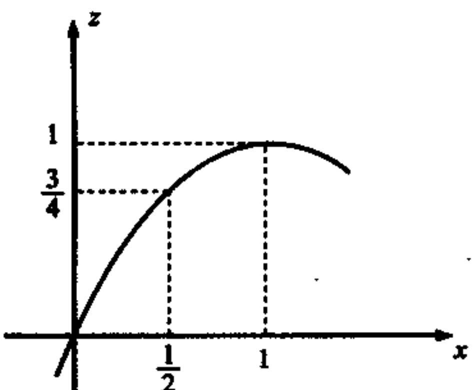


Это свойство имеет наглядный геометрический смысл. Видно, что площадь криволинейной трапеции $CABD$ не меньше площади прямоугольника CC_1D_1D и не больше площади прямоугольника CC_2D_2D.

Рассматриваемое свойство позволяет оценивать определенные интегралы.

Пример 4

Оценим интеграл $I = \int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ и найдем его точное значение.



Сначала оценим подынтегральную функцию на отрезке $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Рассмотрим функцию $z = 2x - x^2$. На промежутке функции $z(x)$ возрастает и $\frac{3}{4} \le 2x - x^2 \le 1$, тогда $\frac{\sqrt{3}}{2} \le \sqrt{2x-x^2} \le 1$ и $\frac{2}{\sqrt{3}} \ge \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} \ge 1$.

Используя свойство 5, получаем: $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{2}\right) \geq \int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} \geq 1\left(1-\frac{1}{2}\right)$,

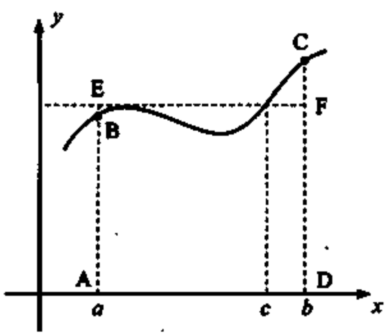
или $\frac{1}{2} \leq \int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, или $0{,}5 \leq I \leq 0{,}57$ (точность ~14%).

Теперь точно вычислим интеграл: $I = \int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} =$

$= \int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}} = \arcsin(x-1)\Big|_{1/2}^{1} = \arcsin 0 - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}52.$

Таким образом, оценки дают достаточно хорошую точность.

Свойство 6 (теорема о среднем). Существует точка $c \in [a; b]$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.



Геометрический смысл этого свойства: на промежутке $[a; b]$ существует такая точка c, что площадь криволинейной трапеции $ABCD$ равна площади прямоугольника $AEFD$.

Пример 5

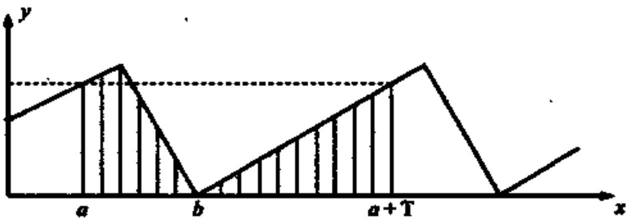
Найдем такую точку c для $\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$.

Прежде всего вычислим интеграл: $\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx =$

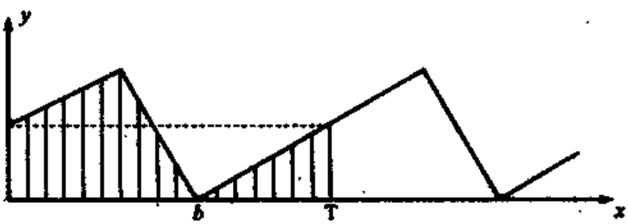
$= \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi$. Тогда получаем равенство $\pi = \sin^2 c \cdot 2\pi$, откуда $\sin^2 c = \frac{1}{2}$ или $\sin c = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Решения этого уравнения на промежутке $[0; 2\pi]$ $c = \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$.

Свойство 7. Для периодической функции $f(x)$ с периодом T выполнено равенство $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$.

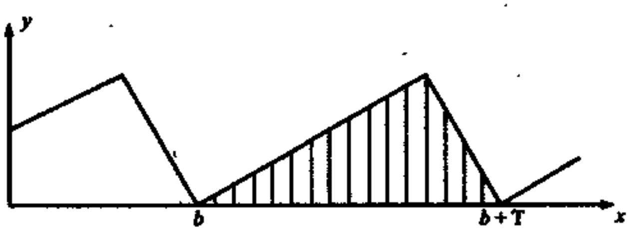
а)



б)



в)



Геометрический смысл свойства 7 поясняет приведенный рисунок. Сначала рассмотрим площадь фигуры на отрезке $[a; a+T]$ (рис. а). Легко сообразить, что если вырезать заштрихованную фигуру, разорвать ее в точке b и совместить эти части, то получится такая же фигура, как и на рис. в.

Если то же проделать с фигурой на рис. б, то вновь получается фигура рис. в.

Таким образом, площади заштрихованных фигур на рис. а и б равны. В этом и состоит геометрический смысл свойства 7.

Пример 6

Вычислим $\int\limits_{5\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}+\pi} \cos^2 x\,dx$.

Учтем, что период функции $\cos^2 x$ равен $T = \pi$. Действительно, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, а период функции $\cos 2x$ составляет $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

Тогда $\int\limits_{5\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}+\pi} \cos^2 x\,dx = \int\limits_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \int\limits_0^{\pi} \dfrac{1+\cos 2x}{2}dx = \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \dfrac{\pi}{2}$.

Свойство 8. На симметричном отрезке $[-a; a]$ выполнены равенства $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, \text{ если } f(x) \text{ – нечетная функция;} \\ 2\int\limits_0^a f(x)dx, \text{ если } f(x) \text{ – четная функция.} \end{cases}$

Графическая иллюстрация свойства приведена на рисунках.

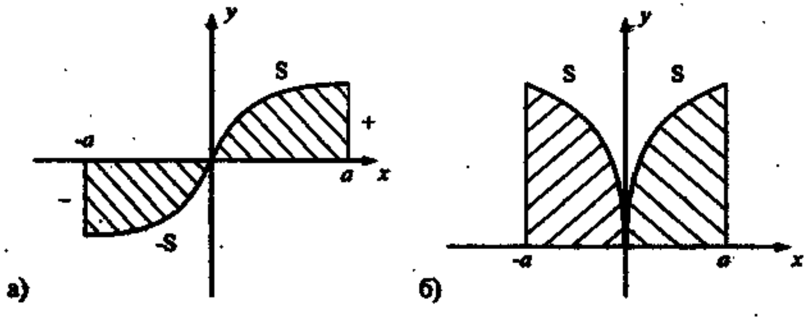


График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. а). Поэтому $\int\limits_0^a f(x)dx = S$, $\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = -S$ и сумма этих интегралов равна нулю, т. е. $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат. Тогда $\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = \int\limits_0^a f(x)dx = S$ и $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2S = 2\int\limits_0^a f(x)dx$.

Пример 7

Вычислим $\int\limits_{-5}^{5}|x|\sqrt{x^2+3}\cos 7x\,\mathrm{arctg}\,2x\,dx.$

Легко сообразить, что подынтегральная функция определена при всех $x\in[-5;\,5]$ и является нечетной. Так как промежуток интегрирования симметричен, то данный интеграл равен нулю.

IV. Задание на уроках и на дом

Проведенный урок носил обзорный (лекционный) характер, поэтому, на наш взгляд, задания нецелесообразны.

V. Подведение итогов уроков

Уроки 20–21. Применение интегралов в математике и физике

Цель: дать представление о широких возможностях применения интегралов в точных науках.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

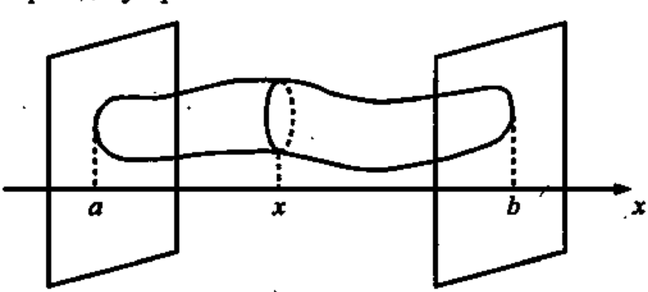
II. Изучение нового материала

Одно из понятий интеграла основывалось на вычислении площади плоской фигуры. Не надо думать, что интеграл используется только для этой цели. Его применения намного разнообразнее. Рассмотрим эти применения.

Применения интеграла в математике

1. Вычисление объемов тел

Пусть требуется вычислить объем V тела, заключенного между двумя перпендикулярными к оси Ox плоскостями $x = a$ и $x = b$.

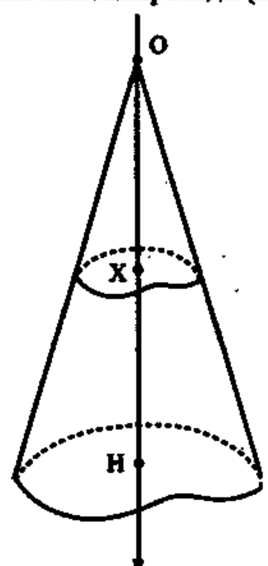


Предположим, что известна площадь любого сечения плоскостью, перпендикулярной к оси Ox. Эта площадь зависит от положения секущей плоскости, т. е. является функцией от x. Обозначим ее $S(x)$ и допустим, что она непрерывна на промежутке $[a; b]$. Разобьем отрезок $[a; b]$ на n промежутков равной длины точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Тогда длина каждого такого промежутка равна $\Delta x = x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$ (где $k = 1, 2, \ldots, n$). Через каждую точку x_k проведем плоскость, перпендикулярную оси Ox. Эти плоскости разбивают данное тело на n слоев.

При достаточно больших значениях n объем слоя, заключенного между плоскостями $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$, равен приближенно $S(x_{k-1})\cdot\Delta x$. Тогда объем всего приближенно равен $V_n \approx S(x_0)\Delta x + S(x_1)\Delta x + \ldots + S(x_{n-1})\Delta x$. Очевидно, что чем больше n, тем ближе значение приближения V_n к точному значению объема тела V (т. е. $V_n \to V$ при $n \to \infty$). Тогда по определению интеграла $V = \int\limits_a^b S(x)dx$.

Пример 1

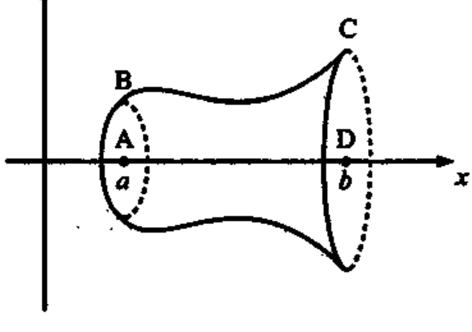
Найдем объем V произвольной пирамиды (конуса).



Рассмотрим произвольную пирамиду (конус) с высотой H и площадью основания S. Направим ось Ox, перпендикулярно плоскости основания. Начало оси Ox поместим в вершину пирамиды (конуса). Все сечения этого тела, перпендикулярные оси Ox, подобны друг другу. Поэтому площадь сечения $S(x)=S\left(\frac{x}{H}\right)^2$. Используя полученную формулу, вычислим объем тела: $V=\int_0^H S(x)dx=$ $=\int_0^H S\left(\frac{x}{H}\right)^2 dx=\frac{S}{H^2}\int_0^H x^2dx=\frac{S}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H=\frac{1}{3}SH$. Итак, объем данного тела $V=\frac{1}{3}SH$ (в случае конуса эту формулу записывают в виде $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$, где R – радиус основания).

Заметим, что аналогичным образом можно вычислить объем усеченной пирамиды (конуса) $V=\frac{H}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$, где S_1 и S_2 – площади оснований, H – высота тела. В случае конуса эту формулу обычно записывают в виде $V=\frac{\pi H}{3}(R_1^2+R_1R_2+R_2^2)$, где R_1 и R_2 – радиусы оснований.

Остановимся на вычислении объемов тел вращения. Сначала **рассмотрим вращение вокруг оси Ox.** Рассмотрим криволинейную трапецию $ABCD$, ограниченную графиком функции $y=f(x)$. При вращении такой трапеции вокруг оси Ox возникает тело. В любом поперечном сечении его радиус $R(x)=|f(x)|$ и площадь $S(x)=\pi f^2(x)$. Тогда объем такого тела вращения $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.



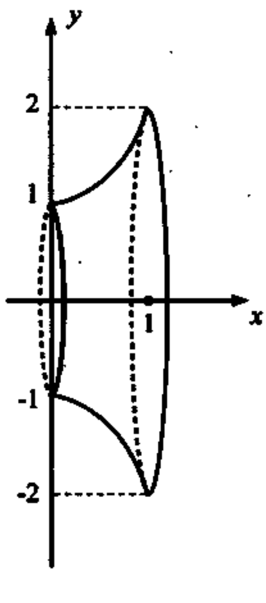
Пример 2

Найдем объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0, x = 1$.

Используя приведенную формулу, вычислим объем данного тела:

$$V = \pi\int_0^1 y^2(x)\,dx = \pi\int_0^1 \left(x^2+1\right)^2 dx = \pi\int_0^1 \left(x^4+2x^2+1\right)dx = \pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2}{3}x^3+x\right)\Big|_0^1 =$$

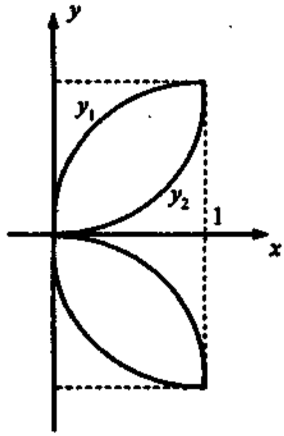
$$= \pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right) = \frac{28}{15}\pi.$$



Пример 3

Вычислим объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y_1(x) = \sqrt{x}$ и $y_2(x) = x^2$.

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ пересекаются в точках $x = a$ и $x = b$ (при этом $a < b$) и $y_1(x) > y_2(x) \geq 0$. Тогда объем полученного тела вращения $V = \pi\int_a^b (y_1^2(x) - y_2^2(x))dx$.



Для рассматриваемой задачи графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ пересекаются в точках $x = 0$ и $x = 1$ и $y_1(x) > y_2(x) \geq 0$ на промежутке [0; 1]. Тогда объем полученного тела вращения $V = \pi\int\limits_0^1 \left(x - x^4\right)dx =$

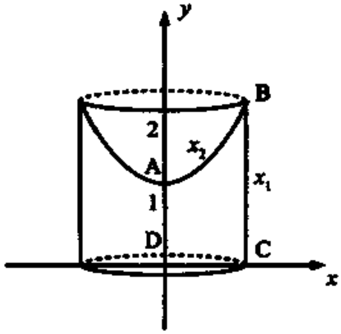
$$= \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}\pi.$$

Аналогичный подход можно использовать и при вращении фигуры вокруг оси Oy.

Пример 4

Найдем объем тела, полученного при вращении вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Очевидно, что эта задача аналогична примерам 2, 3.

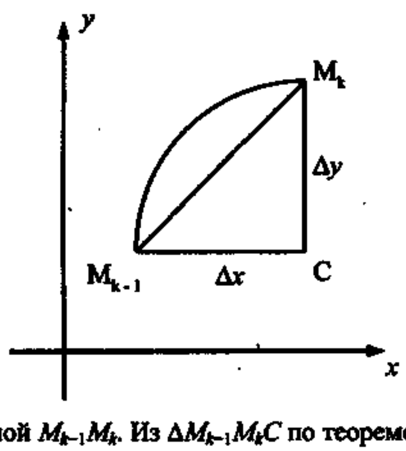


Будем считать, что переменная y является аргументом, а переменная x – функцией. Тогда криволинейная трапеция $ABCD$ ограничена сверху прямой x_1, снизу – кривой x_2 при $y \in [1; 2]$ и прямой x_1 сверху и прямой $x = 0$ при $y \in [0; 1)$. Объем тела вращения равен $V = \pi\int_0^1 x_1^2 dy + \pi\int_1^2 (x_1^2 - x_2^2)dy$. Из равенства $y = x_2^2 + 1$ найдем $x_2^2 = y - 1$. Тогда $V = \pi\int_0^1 1^2 dy + \pi\int_1^2 \left(1^2 - (y-1)\right)dy = \pi y\Big|_0^1 + \pi\left(2y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 =$

$= \pi + \pi\left((4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right) = \pi + \frac{\pi}{2} = 1{,}5\pi.$

2. Длина дуги кривой

Пусть дана дуга AB плоской кривой. Разобьем эту дугу на n частей точками $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_n = B$. Построим ломаную $AM_1...M_{n-1}B$, вписанную в дугу AB. Обозначим периметр этой ломаной P_n. При $n \to \infty$ величина P_n стремится к длине L дуги AB.



Рассмотрим часть дуги и ломаной $M_{k-1}M_k$. Из $\Delta M_{k-1}M_kC$ по теореме Пифагора найдем хорду: $M_{k-1}M_k = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (y'\Delta x)^2} =$ $= \sqrt{1 + (y')^2}\Delta x$. Тогда (рассуждая аналогично уже рассмотренным ранее ситуациям) найдем длину дуги, концы которой имеют координаты $x = a$ и $x = b$. Она равна $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$.

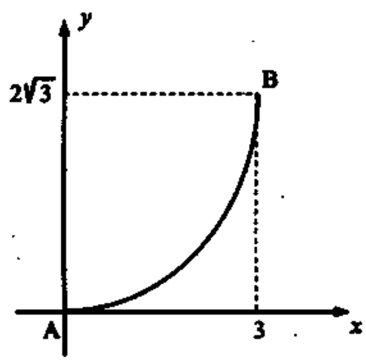
Пример 5

Найдем длину дуги кривой $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ между точками $A(0;\ 0)$ и $B(3;\ 2\sqrt{3})$.

Найдем сначала производную данной функции: $y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}$.

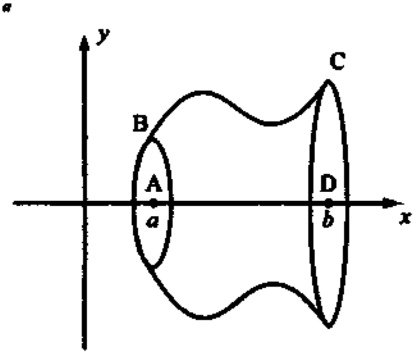
По полученной формуле длина дуги $AB=\int\limits_0^3\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int\limits_0^3\sqrt{1+x}\,dx=$

$$=\left.\frac{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^3=\frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}.$$



3. Площадь поверхности тела вращения

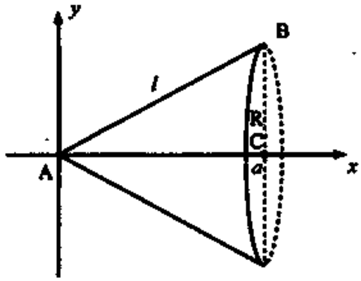
Для площади поверхности тела, которое получается при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции $ABCD$, существует формула $S=2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$.



Проводим ее без доказательства и предлагаем самым подготовленным учащимся вывести ее самостоятельно.

Пример 6

Вычислим площадь боковой поверхности конуса с радиусом основания R и образующей l.

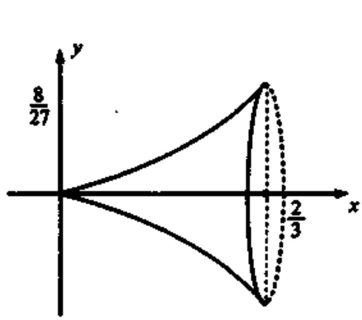


Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. Конус получается при его вращении вокруг оси абсцисс. Очевидно, что уравнение прямой AB $y=\dfrac{R}{a}x$. Производная этой функции $y'=\dfrac{R}{a}$. Тогда площадь поверхности такого тела вращения $S=2\pi\int\limits_0^a\dfrac{R}{a}x\sqrt{1+\left(\dfrac{R}{a}\right)^2}\,dx=$

$=\dfrac{2\pi R}{a^2}\sqrt{a^2+R^2}\int\limits_0^a x\,dx=\dfrac{\pi R}{a^2}\sqrt{a^2+R^2}\,x^2\Big|_0^a=\pi R\sqrt{a^2+R^2}=\pi Rl.$ Учтено, что по теореме Пифагора $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$ или $l=\sqrt{a^2+R^2}$ – длина образующей.

Пример 7

Вычислим площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс дуги кривой $y=x^3$, ограниченной точками $A(0;\,0)$ и $B\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{8}{27}\right)$.



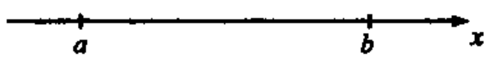
Найдем производную функции $y' = 3x^2$. По полученной формуле площадь поверхности тела вращения $S = 2\pi\int\limits_0^{2/3} x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx$. Вычислим этот интеграл. Для этого введем новую переменную $t = 1+9x^4$, тогда $dt = 36x^3dx$ и $x^3dx = \frac{1}{36}dt$. Пересчитаем пределы интегрирования: $t_1 = 1+9\cdot 0^4 = 1$ и $t_2 = 1+9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 1+\frac{16}{9} = \frac{25}{9}$. Тогда получаем: $S = \frac{2\pi}{36}\int\limits_1^{25/9}\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{18}\int\limits_1^{25/9} t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{\pi}{27}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{\frac{25}{9}} = \frac{\pi}{27}t\sqrt{t}\Big|_1^{\frac{25}{9}} = \frac{\pi}{27}\left(\frac{25}{9}\sqrt{\frac{25}{9}}-1\right) =$
$= \frac{\pi}{27}\left(\frac{125}{27}-1\right) = \frac{98}{729}\pi.$

Применение интеграла в физике и технике

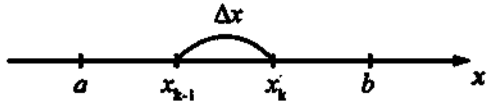
Определенный интеграл широко применяется не только в математике, но и при решении физических и технических задач.

1. Работа переменной силы

Из физики известно, что при движении точки под действием постоянной силы P по прямой и перемещении S работа A силы равна PS (разумеется, сила P направлена вдоль прямой), т. е. $A = PS$. Теперь усложним задачу. Будем считать, что сила P зависит от координаты точки x.



Пусть точка движется по оси Ox под действием силы P (направленной вдоль оси Ox), которая зависит от координаты x, т. е. $P = f(x)$. Под действием этой силы точка перемещается из положения $x = a$ в точку $x = b$. Покажем, что в таком случае работа A силы $P = f(x)$ вычисляется по формуле $A = \int\limits_a^b f(x)dx$. Подход к такой задаче совершенно типовой и уже применялся во всех рассмотренных задачах.



Разобьем отрезок $[a; b]$ на n отрезков одинаковой длины $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Работа силы на всем промежутке $[a; b]$ равна сумме работ этой силы на полученных отрезках. Тогда работа на отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ приближенно равна $f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = f(x_{k-1})\Delta x = = f(x_{k-1})\frac{b-a}{n}$. Поэтому работа A_n силы на всем промежутке $[a; b]$ примерно равна $A_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + ... + f(x_{n-1})\Delta x =$

$= \frac{b-a}{n}(f(x_0) + (x_1) + ... + f(x_{n-1}))$. Точность этого приближения A_n возрастает с увеличением n. Приближенное равенство стремится к истинному значению A при $n \to \infty$, т. е. $A_n \to A$. Тогда по определению интеграла $A = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Пример 8

Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на $L = 0{,}05$ м, если известно, что для ее растягивания на $l = 0{,}01$ м нужна сила $P = 1$ Н?

Согласно закону Гука сила F, растягивающая или сжимающая пружину на длину x, пропорциональна этому растяжению или сжатию x, т. е. $F = kx$ (где k – коэффициент пропорциональности (часто k называют жесткостью пружины)). Из условия известно, что при растяжении на $l = 0{,}01$ м требуется сила $P = 1$ Н. Получаем равенство $P = kl$, откуда жесткость пружины $k = \frac{P}{l}$ и сила растяжения $F = \frac{P}{l}x$.

Вычислим работу этой силы, необходимую для растяжения пружины на величину $L = 0{,}05$ м. Имеем: $A = \int\limits_0^L F(x)dx = \int\limits_0^L \frac{P}{l}x\,dx =$

$= \frac{Px^2}{2l}\Bigg|_0^L = \frac{PL^2}{2l}$. Теперь вычислим эту величину: $A = \frac{1 \cdot 0{,}05^2}{2 \cdot 0{,}01} =$

$= 12{,}5 \cdot 10^{-2} = 0{,}125$ Дж.

Пример 9

Вычислим работу, необходимую для запуска ракеты весом $P = 2 \cdot 10^4$ Н с поверхности Земли на высоту $h = 1500$ км, если радиус Земли $R = 6400$ км.

По закону всемирного тяготения сила f притяжения тела Землей зависит от его расстояния x до центра Земли по формуле $f(x) = \frac{\lambda}{x^2}$.

где λ – некоторая постоянная. На поверхности Земли сила равна весу тела P, а x равно радиусу Земли. Имеем равенство $P=\dfrac{\lambda}{R^2}$, откуда $\lambda = PR^2$ и $f(x)=\dfrac{PR^2}{x^2}$.

При подъеме ракеты с поверхности Земли на высоту h координата x изменяется от $x = R$ до $x = R + h$. Найдем требуемую работу:

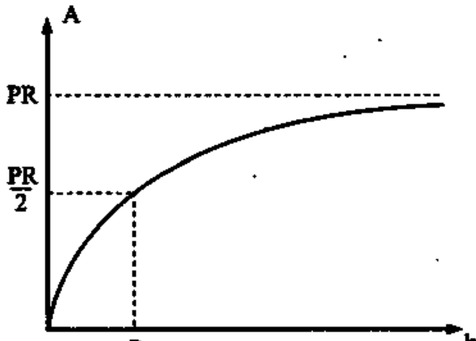
$$A=\int_R^{R+h} f(x)dx = PR^2\int_R^{R+h}\frac{1}{x^2}dx = PR^2\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_R^{R+h} = PR^2\left(-\frac{1}{R+h}+\frac{1}{R}\right)=\frac{PRh}{R+h}.$$

Вычислим эту величину.

При $P = 2\cdot10^4$ Н, $h = 15\cdot10^5$ м и $R = 6400$ км $= 64\cdot10^5$ м получим:

$$A=\frac{2\cdot10^4\cdot64\cdot10^5\cdot15\cdot10^5}{64\cdot10^5+15\cdot10^5}=\frac{192}{79}\cdot10^{10}\approx 2{,}43\cdot10^{10}\text{ Дж}.$$

В заключении этой задачи рассмотрим поведение функции $A(h)=PR\dfrac{h}{R+h}$. Очевидно, что $A(0) = 0$. При $h \ll R$ можно пренебречь величиной h в знаменателе и $A \approx Ph$, т. е. работа A возрастает линейно с увеличением высоты подъема ракеты h. При $h \gg R$ можно пренебречь величиной R в знаменателе и $A \approx PR$, т. е. является величиной постоянной. Поэтому при запуске ракеты на Луну или за пределы нашей Галактики потребуется одна и та же работа.



2. Центр масс

Во многих физических задачах возникает необходимость нахождения центра масс. При этом необходимо учесть следующее:

1) Координата $\bar{x}$ центра масс системы точек с массами m_1, m_2, …, m_n, расположенных на прямой в точках с координатами x_1, x_2, …, x_n, вычисляется по формуле $\bar{x} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$.

2) При вычислении координаты центра масс можно любую часть фигуры заменить материальной точкой с массой этой части фигуры и поместить такую точку в центр масс данной части фигуры.

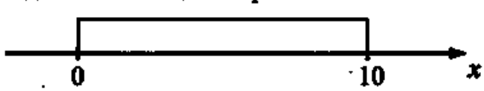
3) Если вдоль стержня – отрезка $[a; b]$ оси Ox – распределена масса плотностью $\rho(x)$, то:

а) суммарная масса стержня $M = \int\limits_a^b \rho(x)dx$;

б) координата центра масс стержня $\bar{x} = \dfrac{1}{M}\int\limits_a^b x\rho(x)dx$.

Пример 10

Определить массу и координату центра масс стержня длины $l = 10$ м, если плотность стержня меняется по закону $\rho = 5 + 0{,}2x$ (кг/м), где x – расстояние от одного из концов стержня.



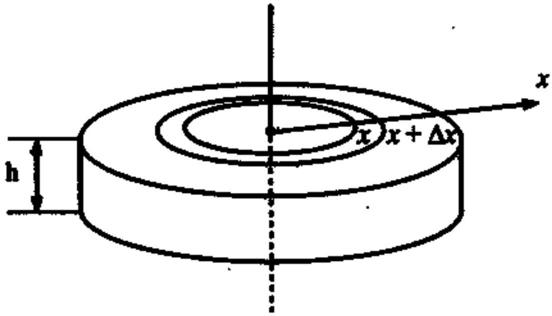
Будем считать, что начало оси Ox совмещено с левым концом стержня. Найдем сначала массу стержня: $M = \int\limits_0^l \rho(x)dx = \int\limits_0^{10} (5 + 0{,}2x)dx = $ $= (5x + 0{,}1x^2)\Big|_0^{10} = 50 + 0{,}1 \cdot 10^2 = 60$ (кг). Теперь определим координату центра масс: $\bar{x} = \dfrac{1}{M}\int\limits_0^l x\rho(x)dx = \dfrac{1}{60}\int\limits_0^{10} x(5 + 0{,}2x)dx = $ $= \dfrac{1}{60}\left(\dfrac{5}{2}x^2 + \dfrac{0{,}2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^{10} = \dfrac{1}{60}\left(250 + \dfrac{200}{3}\right) \approx 5{,}3$ (м), считая от левого конца стержня.

Чтобы продемонстрировать широту применения интеграла, рассмотрим отдельные задачи из различных областей физики и техники, особо не обращая внимания на обоснованность решения.

3. Энергия тела

Пример 11

Найдем кинетическую энергию диска массой M и радиусом R, вращающегося с угловой скоростью ω около оси, проходящей через центр диска перпендикулярно к его плоскости.



Из физики известно, что кинетическая энергия тела равна $E=\dfrac{mV^2}{2}$ (где m – масса, V – скорость тела). Кроме того, существует связь между линейной V и угловой скоростью ω точки: $V=\omega\cdot x$ (где x – расстояние от точки до оси вращения). Из этих двух соотношений получаем формулу для кинетической энергии точки $E=\dfrac{m\omega^2x^2}{2}$.

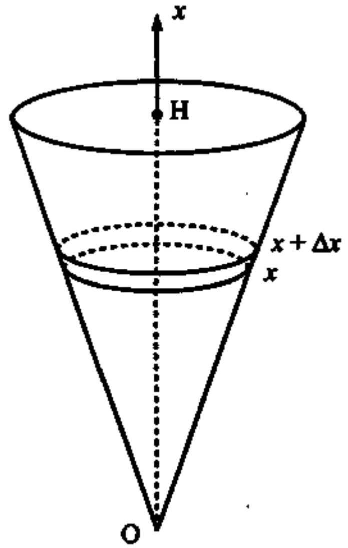
Если диск имеет массу M, радиус R и высоту h, то плотность вещества диска, очевидно, равна $\rho=\dfrac{M}{\pi R^2h}$. Введем ось x, начало которой находится в центре диска. Рассмотрим слой диска, расположенный в промежутке $[x;\ x+\Delta x]$. Сначала вычислим объем ΔV этого слоя: $\Delta V=\pi h((x+\Delta x)^2-x^2)=\pi h(2x\Delta x+(\Delta x)^2)\approx 2\pi hx\Delta x$. Найдем массу этого слоя: $\Delta m\approx\rho\Delta V\approx\dfrac{M}{\pi R^2h}\cdot 2\pi hx\Delta x=\dfrac{2Mx\Delta x}{R^2}$. Кинетическая энергия этого слоя: $\Delta E=\dfrac{\Delta m\omega^2x^2}{2}=\dfrac{M\omega^2x^3\Delta x}{R^2}$. Теперь определим кинетическую энергию всего диска: $E=\displaystyle\int_0^R\dfrac{M\omega^2x^3}{R^2}dx=\dfrac{M\omega^2}{R^2}\int_0^R x^3dx=$

$$=\frac{M\omega^2}{R^2}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^R=\frac{M\omega^2R^2}{4}.$$

4. Гидромеханика

Пример 12

Найдем работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду плотностью ρ из конического сосуда, обращенного вершиной вниз, радиус основания которого равен R и высота H.



Направим ось Ox по высоте конуса и начало ее совместим с вершиной конуса. Рассмотрим слой воды, расположенный в промежутке $[x;\ x+\Delta x]$. Можно считать, что радиус этого слоя $r=\dfrac{R}{H}x$. Найдем массу такого слоя: $\Delta m=\rho\cdot\pi r^2\Delta x=\dfrac{\pi\rho R^2}{H^2}x^2\Delta x$. Чтобы выкачать этот слой воды, надо затратить работу $\Delta A=\Delta m\cdot g(H-x)=$ $=\dfrac{\pi\rho g R^2x^2}{H^2}(H-x)\Delta x$. Теперь легко вычислить работу для выкачивания всей воды из этого сосуда: $A=\int\limits_0^H\dfrac{\pi\rho g R^2}{H^2}x^2(H-x)dx=$

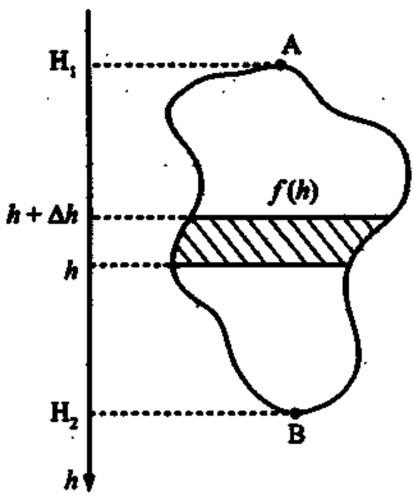
$$=\frac{\pi\rho g R^2}{H^2}\int\limits_0^H x^2(H-x)dx=\frac{\pi\rho g R^2}{H^2}\left(\frac{x^3H}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^H=\frac{\pi\rho g H^2R^2}{12}.$$

Если записать это выражение в виде $A = \frac{\pi R^3 H \rho g}{3} \cdot \frac{H}{4}$, то первый множитель представляет собой вес всей воды в сосуде, второй множитель – перемещение. Другими словами, полученный ответ означает, что совершенная работа равна работе при перемещении точки (с массой, равной массе всей воды) на четверть высоты конуса.

Пример 13

Треугольная пластинка с основанием 0,3 м и высотой 0,6 м погружена вертикально в воду так, что ее вершина лежит на поверхности воды, а основание параллельно ей. Вычислим силу давления воды на пластинку.

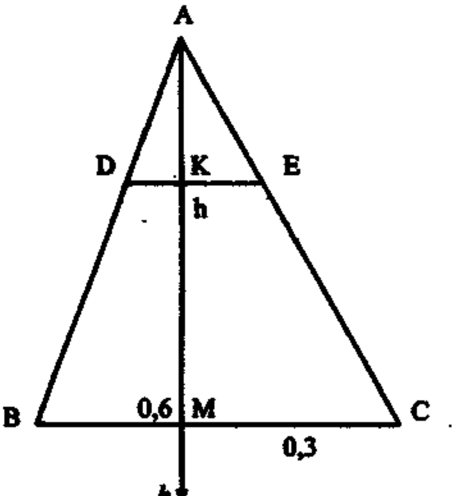
Сначала рассмотрим более общую задачу. Согласно закону Паскаля величина силы P давления (в ньютонах) на горизонтальную площадку вычисляется по формуле $P = g\rho hS$, где g – ускорение свободного падения (в м/с^2), ρ – плотность жидкости (в кг/м^3), S – площадь площадки (в м^2), h – глубина погружения площадки (в м). Если площадка погружена в жидкость не горизонтально, то эта формула неприменима, так как сила давления P меняется с глубиной. Рассмотрим задачу вычисления силы давления жидкости на вертикально расположенную площадку.



Пусть пластинка произвольной формы погружена вертикально в жидкость плотностью ρ так, что расстояние от поверхности жидкости до верхней точки A пластинки равно H_1, а до ее нижней точки B равна H_2. Нужно найти силу P давления жидкости на пластинку.

Рассмотрим слой пластинки, расположенный на промежутке $[h;\ h+\Delta h]$. Пусть ширина этого слоя равна $f(h)$, тогда его площадь $\Delta S = f(h)\Delta h$. При этом сила давления на такой слой $\Delta P = g\rho h f(h)\Delta h$. Теперь легко посчитать силу давления жидкости на всю пластинку: $P = \int\limits_{H_2}^{H_1} g\rho h f(h)dh = g\rho\int\limits_{H_2}^{H_1} hf(h)dh.$

Теперь вернемся к первоначальной задаче. На глубине h найдем ширину DE фигуры ABC. Из подобия треугольников ADE и ABC имеем: $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AK}{AM}$ или $\dfrac{DE}{0{,}3}=\dfrac{h}{0{,}6}$, откуда $DE = f(h)=\dfrac{h}{2}$.

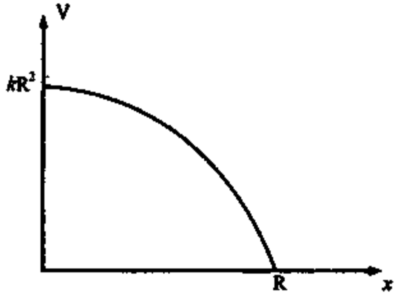


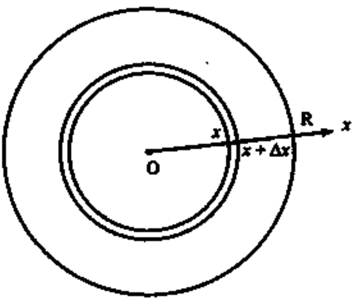
Используя полученную формулу, найдем силу давления жидкости на пластинку: $P=g\rho\int\limits_{H_1}^{H_2} hf(h)dh=g\rho\int\limits_{0}^{0{,}6} h\cdot\dfrac{h}{2}dh=g\rho\dfrac{h^3}{6}\Bigg|_0^{0{,}6}=9{,}8\cdot1000\cdot\dfrac{0{,}6^3}{6}=$

$=980\cdot0{,}36\approx353$ (Н). Учтено, что $g=9{,}8$ м/с^2 и $\rho=1000$ кг/м^3.

Пример 14

При течении жидкости через трубу круглого сечения радиусом R скорость течения V в точке, находящейся на расстоянии x от оси трубы, дается формулой $V=k(R^2-x^2)$, где k – коэффициент, зависящий от разности давлений жидкости на концах трубы, ее длины и вязкости жидкости. Найти количество жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени.





На рисунке для наглядности приведен график зависимости $V(x)$. Рассмотрим слой поперечного сечения трубы, расположенный на промежутке $[x;\ x+\Delta x]$. Тогда через этот слой протекает масса воды $\Delta m = \rho V \Delta S$ (где ρ – плотность воды, ΔS – площадь рассматриваемого слоя). Найдем $\Delta S = \pi(x+\Delta x)^2 - \pi x^2 = 2\pi x\Delta x + \pi(\Delta x)^2 \approx 2\pi x\Delta x$. Тогда масса жидкости $\Delta m = \rho k(R^2 - x^2)\cdot 2\pi x\Delta x = 2\pi\rho k(R^2 - x^2)x\Delta x$. Найдем массу жидкости, протекающей через все поперечное сечение трубы: $m = 2\pi\rho k\int\limits_0^R (R^2x - x^3)dx = 2\pi\rho k\left(\dfrac{R^2x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^R = \dfrac{\pi\rho kR^4}{2}$.

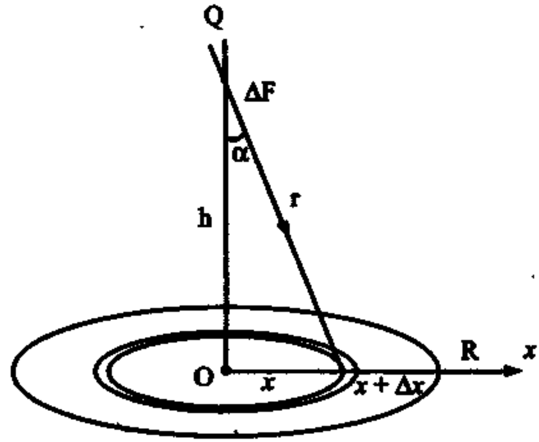
Заметим, что если скорость течения жидкости постоянна по всему поперечному сечению трубы, то $V = kR^2$, $S = \pi R^2$ и масса протекающей жидкости равна $m = \rho VS = \rho kR^2\cdot\pi R^2 = \pi\rho kR^4$. Другими словами, в этом случае протекает ровно в два раза больше жидкости, чем при переменной скорости.

5. Электричество

Пример 15

Найдем силу притяжения круглой пластины с зарядом q и радиусом R и точечного заряда Q, находящегося на расстоянии h от центра пластины.

По закону Кулона сила F взаимодействия зарядов q и Q, расположенных на расстоянии r друг от друга, равна $F = k\dfrac{qQ}{r^2}$, где k – некоторый коэффициент. При этом сила направлена по прямой, соединяющей заряды.



Легко сообразить, что сила взаимодействия зарядов будет направлена по вертикали, так как горизонтальные составляющие сил взаимодействия заряда Q и элементов диска взаимно уравновешивают друг друга. Поэтому будем следить за вертикальными составляющими сил.

Рассмотрим круговой слой диска, расположенный в промежутке $[x; x+\Delta x]$. Пусть он имеет заряд Δq и удален от заряда Q на расстояние r. Угол между вертикалью и прямой, соединяющей заряды Q и Δq, равен α. Тогда сила взаимодействия этих зарядов $\Delta F = k\dfrac{Q\Delta q}{r^2}\cos\alpha$.

Вычислим все необходимые для этой формулы составляющие. Получаем: $r^2 = h^2 + x^2$, $\cos\alpha = \dfrac{h}{r} = \dfrac{h}{\sqrt{h^2+x^2}}$, $\Delta q = q\dfrac{2\pi x\Delta x}{\pi R^2} = \dfrac{2q}{R^2}x\Delta x$.

Тогда $\Delta F = kQ\cdot\dfrac{2qx\Delta x}{R^2(h^2+x^2)}\cdot\dfrac{h}{\sqrt{h^2+x^2}} = \dfrac{2kQqh}{R^2}\cdot\dfrac{x\Delta x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Теперь вычислим силу взаимодействия заряда Q и всего диска $F = \dfrac{kQqh}{R^2}\displaystyle\int_0^R\dfrac{2x\,dx}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Для вычисления этого интеграла введем новую переменную $t = h^2 + x^2$, тогда $dt = 2x\,dx$. Теперь $F = \dfrac{kQqh}{R^2}\displaystyle\int_{h^2}^{h^2+R^2}\dfrac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} =$

$= -\dfrac{2kQqh}{R^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Bigg|_{h^2}^{h^2+R^2} = \dfrac{2kQqh}{R^2}\left(\dfrac{1}{h} - \dfrac{1}{\sqrt{h^2+R^2}}\right)$. Для исследования этой функции преобразуем ее: $F = 2kQ\pi \cdot \frac{q}{\pi R^2}\left(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}\right) =$

$$= 2kQ\pi \cdot \frac{q}{\pi R^2} \cdot \left(1-\frac{\frac{h}{R}}{\sqrt{1+\left(\frac{h}{R}\right)^2}}\right) = 2kQ\pi \cdot \sigma\left(1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$ Здесь введены обозначения: $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$ – плотность заряда диска, $x = \frac{h}{R}$ – безразмерная характеристика.

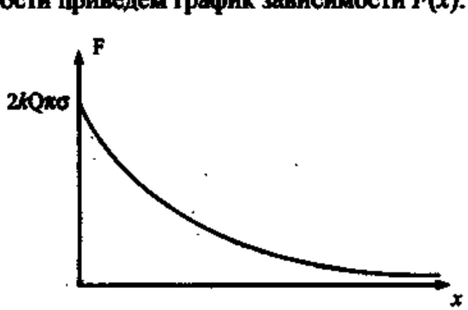
Рассмотрим предельные случаи:

а) $x \ll 1$, т. е. $h \ll R$. Этот случай соответствует взаимодействию заряда Q с равномерно заряженной бесконечной плоскостью. Тогда $F = 2kQ\pi\sigma(1-x)$, т. е. сила взаимодействия практически постоянна. Эту ситуацию можно найти в любом справочнике по физике.

б) $x \gg 1$, т. е. $h \gg R$ (расстояние между зарядом и диском очень большое). Фактически этот случай соответствует взаимодействию двух точечных зарядов. Тогда получаем: $F = 2kQ\pi\sigma\left(1-\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) =$

$$= 2kQ\pi\sigma\left(1-\frac{x}{1+\frac{1}{2x^2}}\right) = 2kQ\pi\sigma\left(1-\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)\right) = \frac{kQ\pi\sigma}{x^2}.$$ Эта формула фактически является законом Кулона, так как $\sigma \sim q$ и $F \sim \frac{Qq}{x^2}$.

Для наглядности приведем график зависимости $F(x)$.



Из всех рассмотренных примеров видно, насколько **многообразно и разностороннее применение** интегралов в математике, физике, технике.

III. Задание на уроках

№ 370 (а, б); 371 (в, г); 372 (а); 374; 375 (1); 376; 378; 380.

IV. Задание на дом

№ 370 (в, г); 371 (а, б); 372 (б); 383; 375 (2); 377; 379.

V. Подведение итогов уроков

Уроки 22–23. Контрольная работа по теме «Интеграл»

Цель: проверить знания учащихся, используя разноуровневые варианты.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее и варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит шесть задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

Вычислите интегралы:

1. $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/6} \sin 3x\,dx$;

2. $\int\limits_{1}^{2} \dfrac{x^3+3x^2}{x+3}\,dx$.

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

3. $y=4-x^2$, $y=0$;

4. $y=3\cos 2x$, $y=0$, $0\le x\le \dfrac{\pi}{4}$.

5. Вычислите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=2x+1$, $y=0, x=1, x=3$.

6. Чему равен путь, пройденный точкой, движущейся по прямой, за отрезок времени от $t_1=2$ до $t_2=5$, если скорость точки $V(t)=3t^2+2t-4$ (t – в секундах, V – в м/с)?

Вариант 2

Вычислите интегралы:

1. $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/4} \cos 2x\,dx$;

2. $\int\limits_{3}^{4} \dfrac{x^3-2x^2}{x-2}\,dx$.

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

3. $y=9-x^2$, $y=0$;

4. $y=4\sin 3x$, $y=0$, $0\le x\le \dfrac{\pi}{3}$.

5. Вычислите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=2x-3$, $y=0, x=2, x=4$.

6. Чему равен путь, пройденный точкой, движущейся по прямой, за отрезок времени от $t_1=1$ до $t_2=4$, если скорость точки $V(t)=3t^2-2t+1$ (t – в секундах, V – в м/с)?

Вариант 3

Вычислите интегралы:

1. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \left(\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{x}{3}\right)dx$;

2. $\int_1^4 \frac{x^2 + x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}}dx.$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

3. $y = \sin^2 x \cos x,\ y = 0, x = 0,\ x = \frac{\pi}{2};$

4. $y = x^2,\ y = 5x - 4.$

5. Вычислите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 3x^{\frac{3}{2}} - \sqrt{x},\ y = 0, x = 1, x = 2.$

6. Чему равен путь, пройденный точкой, движущейся по прямой, за отрезок времени от $t_1 = 2$ до $t_2 = 5$, если скорость точки $V(t) = 2t + 3\sin \pi t$ (t – в секундах, V – в м/с)?

Вариант 4

Вычислите интегралы:

1. $\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}\right)dx;$

2. $\int_1^4 \frac{2x^2 + 3x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}}dx.$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

3. $y = \cos^2 x \sin x,\ y = 0, x = 0,\ x = \frac{\pi}{2};$

4. $y = x^2,\ y = 3x - 2.$

5. Вычислите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x},\ y = 0, x = 1, x = 2.$

6. Чему равен путь, пройденный точкой, движущейся по прямой, за отрезок времени от $t_1 = 1$ до $t_2 = 4$, если скорость точки $V(t) = 4t - 3\cos \pi t$ (t – в секундах, V – в м/с)?

Вариант 5

Вычислите интегралы:

1. $\int_0^2 (\sqrt[3]{1 + 13x} + 2x)dx;$

2. $\int_0^{\pi/6} \sin 2x \cos x\, dx.$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

3. $y=\begin{cases}1-|x| \text{ при } -1\le x\le\dfrac{1}{2}\\ \cos\dfrac{2\pi}{3}x \text{ при } \dfrac{1}{2}<x\le\dfrac{3}{4}\end{cases}, y=0;$

4. $y=\sin^4 x,\ y=0,\ 0\le x\le\pi.$

5. Вычислите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=5x-4$.

6. Чему равен путь, пройденный точкой, движущейся по прямой, за отрезок времени от $t_1=0$ до $t_2=1$, если скорость точки $V(t)=3\sin^3\pi t$ (t – в секундах, V – в м/с)?

Вариант 6

Вычислите интегралы:

1. $\int\limits_0^2(\sqrt{1+4x}-4x)dx;$

2. $\int\limits_0^{\pi/6}\cos 2x\sin x\,dx.$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

3. $y=\begin{cases}2-|x| \text{ при } -2\le x<1\\ 2\sin\dfrac{\pi x}{6} \text{ при } 1\le x\le 6\end{cases}, y=0;$

4. $y=\cos^4 x,\ y=0,\ -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}.$

5. Вычислите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=3x-2$.

6. Чему равен путь, пройденный точкой, движущейся по прямой, за отрезок времени от $t_1=0$ до $t_2=\dfrac{1}{2}$, если скорость точки $V(t)=5\cos^3\pi t$ (t – в секундах, V – в м/с)?

Урок 24. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы; рассмотреть наиболее типичные ошибки; разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

Итоги \ № задачи	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
–	1				
Ø	1				

Обозначения:

\+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными ошибками;

– – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу. Вариант 1, 2 – 8 учеников.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

2. *Ответ*: $2\frac{1}{3}$.

3. *Ответ*: $10\frac{2}{3}$.

4. *Ответ*: 1,5.

5. *Ответ*: $52\frac{2}{3}\pi$.

6. *Ответ*: 126.

Вариант 2

1. *Ответ*: $\frac{1}{4}$.

2. *Ответ*: $12\frac{1}{3}$.

3. *Ответ*: 36.

4. *Ответ*: $2\frac{2}{3}$

5. *Ответ*: $20\frac{2}{3}\pi$.

6. *Ответ*: 51.

Вариант 3

1. *Ответ*: $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$.

2. *Ответ*: $24\frac{17}{30}$.

3. *Ответ*: $\frac{1}{3}$.

4. *Ответ*: $4\frac{5}{6}$

5. *Ответ*: $27\frac{1}{6}\pi$.

6. *Ответ*: $21+\frac{6}{\pi}$.

Вариант 4

1. *Ответ*: $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$.

2. *Ответ*: $51\frac{29}{30}$.

3. *Ответ*: $\frac{1}{3}$.

4. *Ответ*: $\frac{1}{6}$

5. *Ответ*: $25\frac{5}{6}\pi$.

6. *Ответ*: 30.

Решения

Вариант 5

1. Используем правило интегрирования функций $f(kx+b)$ и получим: $\int\limits_0^2(\sqrt[3]{1+13x}+2x)dx=\left(\frac{1}{13}\cdot\frac{3}{4}(1+13x)^{\frac{4}{3}}+x^2\right)\Big|_0^2=\left(\frac{3}{52}(1+13x)^{\frac{4}{3}}+x^2\right)\Big|_0^2=$

$=\left(\frac{3}{52}\cdot81+4\right)-\frac{3}{52}=8\frac{8}{13}$.

Ответ: $8\frac{8}{13}$.

2. Разложим подынтегральную функцию в сумму функций: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sin2x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin3x+\sin x)\,dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos3x}{3}+\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{3}+\cos\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\cos0}{3}+\cos0\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{2}{3}=\frac{8-3\sqrt{3}}{12}$.

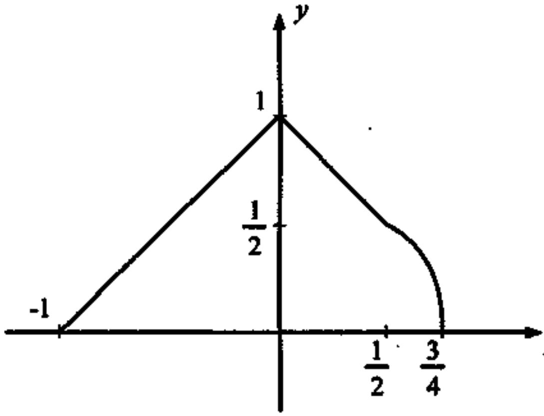
Ответ: $\frac{8-3\sqrt{3}}{12}$.

3. Раскроем знак модуля, построим график подынтегральной функции и вычислим площадь полученной фигуры. Имеем: $S=\int\limits_{-1}^{0}(1+x)\,dx+\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}(1-x)\,dx+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\cos\frac{2\pi}{3}x\,dx=\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}+$

$+\frac{3}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{3}x\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}=-\left(-1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\frac{3}{2\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{2\pi}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{7}{8}+\frac{3(2-\sqrt{3})}{4\pi}$.

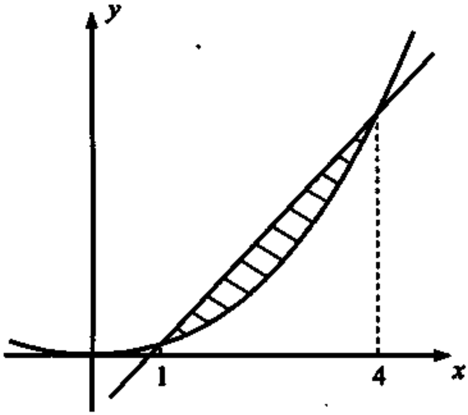
Ответ: $\frac{7}{8}+\frac{3(2-\sqrt{3})}{4\pi}$.



4. Используем формулу понижения степени и преобразуем подынтегральную функцию: $\sin^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)=$ $=\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$ Площадь искомой фигуры $S=\int\limits_0^{\pi}\sin^4 x\,dx=\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx=$ $=\left(\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{3}{8}\pi.$

Ответ: $\frac{3}{8}\pi$.

5. Найдем точки пересечения данных линий. Для этого решим уравнение $x^2=5x-4$. Его корни $x_1=1$ и $x_2=4$. Тогда объем данного тела вращения $V=\pi\int\limits_1^4((5x-4)^2-(x^2)^2)dx=\pi\int\limits_1^4(25x^2-40x+16-x^4)dx=$ $=\pi\left(\frac{25}{3}x^3-20x^2+16x-\frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_1^4=\pi\left(\frac{25}{3}\cdot 64-20\cdot 16+16\cdot 4-\frac{1}{5}\cdot 1024\right)-$ $-\pi\left(\frac{25}{3}-20+16-\frac{1}{5}\right)=68\frac{2}{5}\pi.$



Ответ: $68\frac{2}{5}\pi$.

6. Найдем пройденный точкой путь: $S=3\int_0^1 \sin^3 \pi t\,dt=3\int_0^1 \sin^2 \pi t \sin \pi t\,dt=$
$=3\int_0^1 (1-\cos^2 \pi t)\sin \pi t\,dt$. Введем новую переменную $z=\cos \pi t$, тогда $dz=-\pi \sin \pi t\,dt$. Тогда $S=-\frac{3}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-z)^2\,dz=-\frac{3}{\pi}\left(z-\frac{z^3}{3}\right)\Big|_1^{-1}=-\frac{3}{\pi}\left(-1+\frac{1}{3}\right)+$
$+\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{\pi}$.

Ответ: $\frac{4}{\pi}$.

Вариант 6

1. Используем правило интегрирования функций $f(kx+b)$ и получим: $\int_0^2(\sqrt{1+4x}-4x)dx=\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+4x)^{\frac{3}{2}}-2x^2\right)\Big|_0^2=\left(\frac{1}{6}(1+4x)^{\frac{3}{2}}-2x^2\right)\Big|_0^2=$
$=\left(\frac{1}{6}\cdot 27-8\right)-\frac{1}{6}=-3\frac{2}{3}$.

Ответ: $-3\frac{2}{3}$.

2. Разложим подынтегральную функцию в сумму функций: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 3x - \sin x)\, dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 3x}{3} - \cos x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} =$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{3} - \cos\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\cos 0}{3} - \cos 0\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{3}-4}{12}.$$

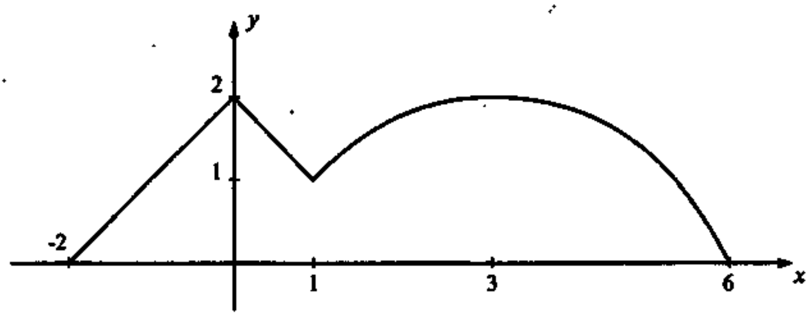
Ответ: $\frac{3\sqrt{3}-4}{12}$.

3. Раскроем знак модуля, построим график подынтегральной функции и вычислим площадь полученной фигуры. Имеем: $S = \int\limits_{-2}^{0} (2+x)dx + \int\limits_{0}^{1} (2-x)dx + \int\limits_{1}^{6} 2\sin\frac{\pi x}{6}dx = \left(2x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1} -$

$$-2\cdot\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi x}{6}\Bigg|_1^6 = (4-2) + \left(2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{12}{\pi}\left(\cos\pi - \cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{2} - \frac{12}{\pi}\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \frac{7}{2} + \frac{6(2+\sqrt{3})}{\pi}.$$

Ответ: $\frac{7}{2} + \frac{6(2+\sqrt{3})}{\pi}$.



4. Используем формулу понижения степени и преобразуем подынтегральную функцию: $\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) =$

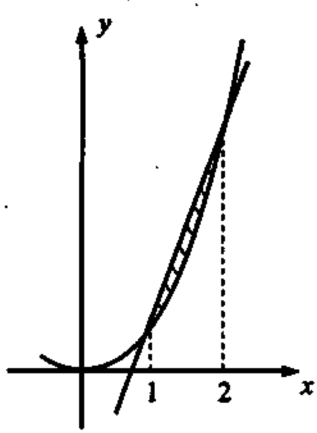
$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$ Площадь искомой фигуры $S=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx=$

$=\left(\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{8}\pi.$

Ответ: $\frac{3}{8}\pi$.

5. Найдем точки пересечения данных линий. Для этого решим уравнение $x^2=3x-2$. Его корни $x_1=1$ и $x_2=2$. Тогда объем данного тела вращения $V=\pi\int\limits_1^2((3x-2)^2-(x^2)^2)dx=\pi\int\limits_1^2(9x^2-12x+4-x^4)dx=$

$=\pi\left(3x^3-6x^2+4x-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_1^2=\pi\left(3\cdot 8-6\cdot 4+4\cdot 2-\frac{32}{5}\right)-\pi\left(3-6+4-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5}\pi.$



Ответ: $\frac{4}{5}\pi$.

6. Найдем пройденный точкой путь: $S=5\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\cos^3\pi t\,dt=5\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\cos^2\pi t\cdot\cos\pi t\,dt=$

$=5\int\limits_0^{\frac{1}{2}}(1-\sin^2\pi t)\cos\pi t\,dt$. Введем новую переменную $z=\sin\pi t$, тогда

$dz = \pi \cos \pi t\, dt$. Тогда $S = \frac{5}{\pi}\int\limits_0^1 (1-z^2)dz = \frac{5}{\pi}\left(z - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}\right) =$

$= \frac{10}{3\pi} = 3\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\pi}$.

Ответ: $\frac{10}{3\pi}$.

Уроки 25–26. Зачетная работа по теме «Первообразная и интеграл»

Цель: проверить знания учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи находятся в части А, более сложные – в части В, еще сложнее – в части С. Каждая задача из А оценивается в 1 балл, из В – в 2 балла, из С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы отдельного задания можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

III. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Докажите, что функция $F(x) = 3 + 4\sin 2x$ является первообразной для функции $f(x) = 8\cos 2x$ при $x \in R$.

2. Для функции $f(x)=\sqrt{5x-1}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $A(2;\ 4)$. Постройте график этой функции.

Найдите общий вид первообразных для функции:

3. $f(x)=2(3x+1)^5$;

4. $f(x)=3\cos 5x-\dfrac{4}{\sin^2 2x}$;

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^3+2x$, $y=0, x=1, x=2$.

6. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=\sqrt{x-1}$, $y=0, x=5$.

7. Точка движется по прямой со скоростью $V(t)=4t+\sin \pi t$. Найдите путь, пройденный точкой за время от $t_1=1$ до $t_2=5$.

B

8. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y=8\cos x,\ x=0,\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$.

Найдите неопределенные интегралы (первообразные):

9. $\int \sin^2 3x\cos 5x\,dx$;

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}}$.

11. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)=x^3-3x$ и касательной к этому графику, проведенной в точке $x_0=-1$.

C

12. Найдите $\int x\cos^2 3x\,dx$.

13. Из геометрических соображений вычислите интеграл $\int\limits_{-2}^{2}(5+\sqrt{4-x^2})dx$.

14. Зная, что $\int\limits_{6}^{11} f(x)dx=10$, найдите выражение $\int\limits_{1}^{2} f(5x+1)dx$.

Вариант 2

А

1. Докажите, что функция $F(x)=7+5\cos 3x$ является первообразной для функции $f(x)=-15\sin 3x$ при $x\in R$.

2. Для функции $f(x)=\sqrt{7x-3}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $A(1;\,2)$. Постройте график этой функции.

Найдите общий вид первообразных для функции:

3. $f(x)=3(4x+5)^6$;

4. $f(x)=2\sin 3x-\dfrac{6}{\cos^2 5x}$.

5. **Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями** $y=x^3+4x,\ y=0,\ x=1,\ x=3$.

6. **Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями** $y=\sqrt{x+1}$, $y=0,\ x=3$.

7. Точка движется по прямой со скоростью $V(t)=6t+2\sin \pi t$. Найдите путь, пройденный точкой за время от $t_1=3$ до $t_2=5$.

В

8. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $y=8\sin x,\ \ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\ \ x=\dfrac{\pi}{2}$.

Найдите неопределенные интегралы (первообразные):

9. $\int\cos^2 2x\sin 7x\,dx$;

10. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}}$.

11. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x+3$ и касательной к этому графику, проведенной в точке $x_0=-1$.

С

12. Найдите $\int x\sin^2 3x\,dx$.

13. Из геометрических соображений вычислите интеграл $\int\limits_{-3}^{3}(6-\sqrt{9-x^2})dx$.

14. Зная, что $\int_2^8 f(x)dx = 6$, найдите выражение $\int_1^3 f(3x-1)dx$.

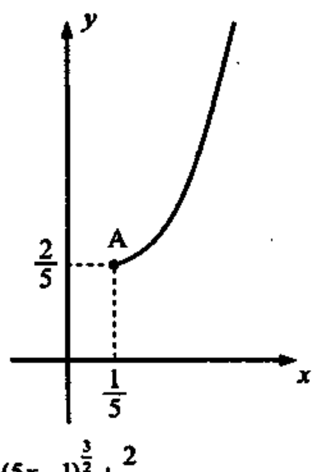
IV. Разбор заданий вариантов

Вариант 1

1. Обе функции $F(x)$ и $f(x)$ определены при $x \in R$. Найдем $F'(x) = (3+4\sin 2x)' = 4\cdot 2\cos 2x = 8\cos 2x = f(x)$. Так как выполнено равенство $F'(x) = f(x)$, то по определению функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

Ответ: доказано.

2. Используя правило нахождения первообразной для функции $f(kx+b)$, для функции $f(x)=\sqrt{5x-1}=(5x-1)^{\frac{1}{2}}$ напишем общий вид первообразных: $F(x)=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}(5x-1)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{15}(5x-1)^{\frac{3}{2}}+C$. Так как график этой функции проходит через точку $A(2; 4)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению первообразной. Получаем: $4=\frac{2}{15}\cdot 9^{\frac{3}{2}}+C$ или $4=\frac{18}{5}+C$, откуда $C=\frac{2}{5}$. Итак, $F(x)=\frac{2}{15}(5x-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}$. Эскиз графика приведен на рисунке.



Ответ: $F(x)=\frac{2}{15}(5x-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}$.

Применяя правило нахождения первообразной для функции $f(kx+b)$, напишем общий вид первообразных:

3. Для функции $f(x)=2\cdot(3x+1)^5$ получаем: $F(x)=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}(3x+1)^6+C=$

$=\frac{1}{9}(3x+1)^6+C.$

Ответ: $F(x)=\frac{1}{9}(3x+1)^6+C.$

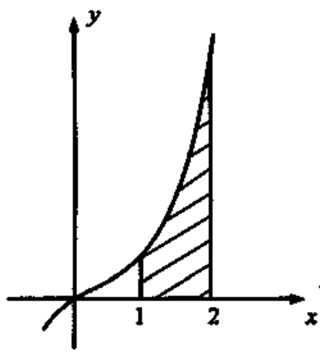
4. Для функции $f(x)=3\cos 5x-\frac{4}{\sin^2 2x}$ имеем: $F(x)=\frac{3}{5}\sin 5x+$

$+\frac{4}{2}\operatorname{ctg} 2x+C=\frac{3}{5}\sin 5x+2\operatorname{ctg} 2x+C.$

Ответ: $F(x)=\frac{3}{5}\sin 5x+2\operatorname{ctg} 2x+C.$

5. Схематично изобразим график функции $y=x^3+2x$ и вычислим площадь заданной фигуры: $S=\int\limits_1^2(x^3+2x)dx=\left(\frac{x^4}{4}+x^2\right)\Big|_1^2=$

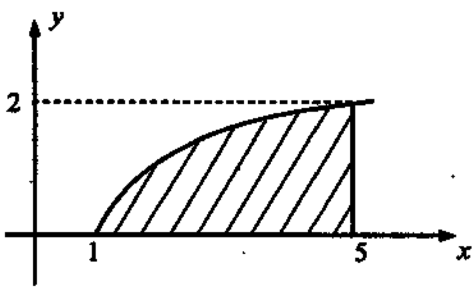
$=(4+4)-\left(\frac{1}{4}+1\right)=6\frac{3}{4}.$



Ответ: $6\frac{3}{4}$.

6. Изобразим заданную криволинейную трапецию. При ее вращении вокруг оси абсцисс получаем тело с объемом $V=\pi\int\limits_1^5(x-1)\,dx=$

$=\pi\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^5=\pi\left(\frac{25}{2}-5\right)-\pi\left(\frac{1}{2}-1\right)=8\pi.$



Ответ: 8π.

7. Найдем путь, пройденный точкой: $S = \int\limits_1^5 (4t + \sin \pi t)\,dt =$

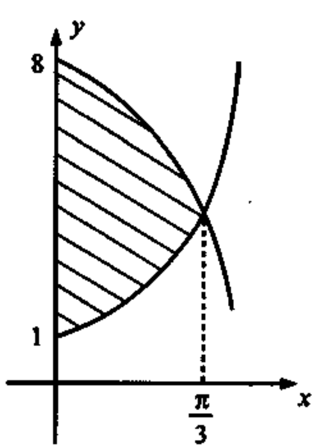
$$= \left(2t^2 - \frac{1}{\pi}\cos \pi t\right)\Bigg|_1^5 = \left(50 - \frac{1}{\pi}\cos 5\pi\right) - \left(2 - \frac{1}{\pi}\cos \pi\right) = 48.$$

Ответ: 48.

8. Вычислим площадь заданной фигуры. Определим точку пересечения линий. Получаем уравнение $\frac{1}{\cos^2 x} = 8\cos x$ или $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда

$x = \frac{\pi}{3}$. Площадь фигуры $S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(8\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = (8\sin x - \operatorname{tg} x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$

$$= 8\sin\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$



Ответ: $3\sqrt{3}$.

9. В подынтегральной функции перейдем к сумме функций: $\sin^2 3x\cos 5x = \dfrac{1-\cos 6x}{2}\cos 5x = \dfrac{1}{2}\cos 5x - \dfrac{1}{2}\cos 6x\cos 5x = \dfrac{1}{2}\cos 5x -$ $-\dfrac{1}{4}\cos 11x - \dfrac{1}{4}\cos x$. Теперь вычислим неопределенный интеграл: $\int \sin^2 3x\cos 5x\,dx = \int\left(\dfrac{1}{2}\cos 5x - \dfrac{1}{4}\cos 11x - \dfrac{1}{4}\cos x\right)dx = \dfrac{1}{10}\sin 5x -$ $-\dfrac{1}{44}\sin 11x - \dfrac{1}{4}\sin x + C$.

Ответ: $\dfrac{1}{10}\sin 5x - \dfrac{1}{44}\sin 11x - \dfrac{1}{4}\sin x + C$.

10. Избавимся от иррациональности в знаменателе подынтегральной функции: $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}} = \int\dfrac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-4})dx}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-4})} =$

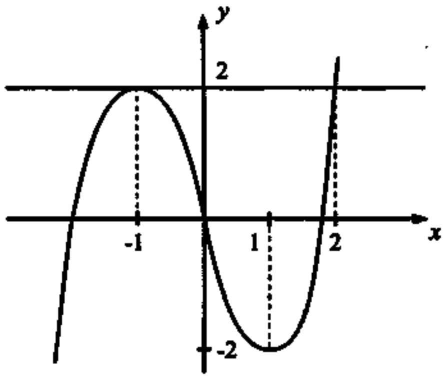
$$=\frac{1}{3}\int(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-4})dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-4)^{\frac{3}{2}}\right)+C =$$

$$=\frac{2}{9}\left((x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-4)^{\frac{3}{2}}\right)+C.$$

Ответ: $\dfrac{2}{9}\left((x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-4)^{\frac{3}{2}}\right)+C$.

11. Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3-3x$ в точке $x_0=-1$ и получим: $y=(3x_0^2-3)(x-x_0)+x_0^3-3x_0$ или $y=2$. Найдем точку пересечения графиков функций $f(x)=x^3-3x$ и $y=2$. Получаем уравнение $x^3-x=2$, корни которого $x=-1$ и $x=2$. Тогда площадь заданной фигуры $S=\int\limits_{-1}^{2}\left(2-x^3+3x\right)dx =$

$$=\left(2x-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = (4-4+6)-\left(-2-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=6\frac{3}{4}.$$

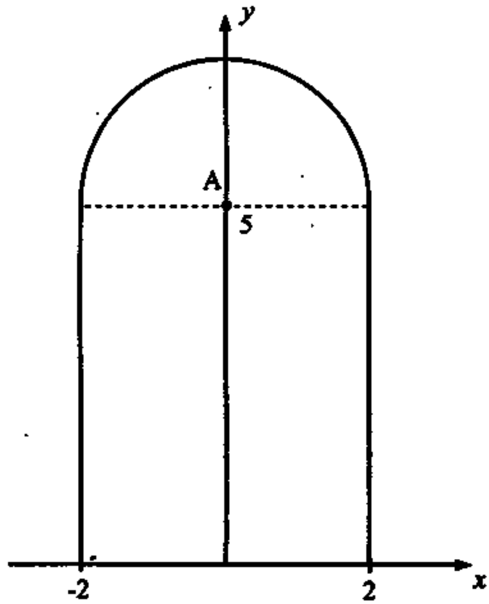


Ответ: $6\frac{3}{4}$.

12. Запишем интеграл в виде $I=\int x\cos^2 3x\,dx=\frac{1}{2}\int x(1+\cos 6x)\,dx=$ $=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\int x\cos 6x\,dx$. Последний интеграл вычисляется методом интегрирования по частям: $\int x\cos 6x\,dx$. Будем считать, что $u=x$, $dV=\cos 6x\,dx$, тогда $du=dx$ и $V=\int\cos 6x\,dx=\frac{1}{6}\sin 6x$. Получаем: $\int x\cos 6x\,dx=\frac{1}{6}x\sin 6x-\frac{1}{6}\int\sin 6x\,dx=\frac{1}{6}x\sin 6x+\frac{1}{36}\cos 6x$. Окончательно находим интеграл: $I=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{12}x\sin 6x+\frac{1}{72}\cos 6x+C$.

Ответ: $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x\sin 6x+\frac{1}{72}\cos 6x+C$.

13. Построим график подынтегральной функции $y=5+\sqrt{4-x^2}$. Получаем: $y-5=\sqrt{4-x^2}$ (где $y-5\geq 0$, т. е. $y\geq 5$) или $x^2+(y-5)^2=2^2$. Это уравнение верхней полуокружности с центром в точке $A(0;\,5)$ и радиусом 2. Теперь легко вычислить площадь построенной фигуры, состоящей из прямоугольника (с размерами 4 и 5) и полукруга радиусом 2. Получаем: $S=4\cdot 5+\frac{1}{2}\pi\cdot 2^2=20+2\pi$.



Ответ: $20+2\pi$.

14. Для вычисления $\int\limits_1^2 f(5x+1)dx$ введем новую переменную $t=5x+1$, тогда $dt=5dx$ и $dx=\frac{1}{5}dt$. Получаем $\int\limits_1^2 f(5x+1)dx =$ $=\frac{1}{5}\int\limits_6^{11} f(t)dt=\frac{1}{5}\cdot 10=2$. При этом $\int\limits_6^{11} f(x)dx=\int\limits_6^{11} f(t)dt$ (очевидно, что безразлично, какой буквой обозначена переменная интегрирования). При замене переменной пересчитываются границы интегрирования.

Ответ: 2.

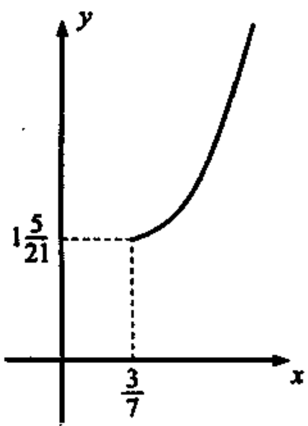
Вариант 2

1. Обе функции $F(x)$ и $f(x)$ определены при $x\in R$. Найдем $F'(x)=(7+5\cos 3x)'=5\cdot(-3)\sin 3x=-15\sin 3x=f(x)$. Так как выполнено равенство $F'(x)=f(x)$, то по определению функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

Ответ: доказано.

2. Используя правило нахождения первообразной для функции $f(kx+b)$, для функции $f(x)=\sqrt{7x-3}=(7x-3)^{\frac{1}{2}}$ напишем общий

вид первообразных: $F(x)=\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{3}(7x-3)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{21}(7x-3)^{\frac{3}{2}}+C$. Так как график этой функции проходит через точку $A(1;\,2)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению первообразной. Получаем: $2=\frac{2}{21}\cdot 4^{\frac{3}{2}}+C$ или $2=\frac{16}{21}+C$, откуда $C=1\frac{5}{21}$. Итак, $F(x)=\frac{2}{21}(7x-3)^{\frac{3}{2}}+1\frac{5}{21}$. Эскиз графика приведен на рисунке.



Ответ: $F(x)=\frac{2}{21}(7x-3)^{\frac{3}{2}}+1\frac{5}{21}$.

Применяя правило нахождения первообразной для функции $f(kx+b)$, напишем общий вид первообразных:

3. Для функции $f(x)=3(4x+5)^6$ получаем: $F(x)=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7}(4x+5)^7+$
$+C=\frac{3}{28}(4x+5)^7+C$.

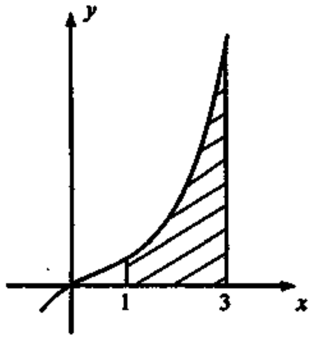
Ответ: $F(x)=\frac{3}{28}(4x+5)^7+C$.

4. Для функции $f(x)=2\sin 3x-\frac{6}{\cos^2 5x}$ имеем: $F(x)=-\frac{2}{3}\cos 3x-$
$-\frac{6}{5}\operatorname{tg} 5x+C$.

Ответ: $F(x)=-\frac{2}{3}\cos 3x-\frac{6}{5}\operatorname{tg} 5x+C$.

5. Схематично изобразим график функции $y = x^3 + 4x$ и вычислим площадь заданной фигуры: $S = \int\limits_1^3 (x^3 + 4x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right)\Bigg|_1^3 =$

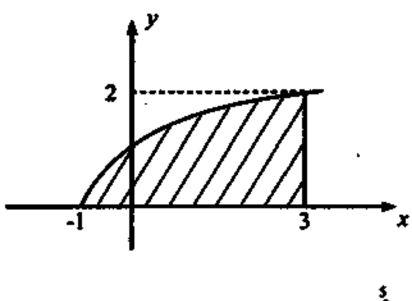
$= \left(\frac{81}{4} + 18 \right) - \left(\frac{1}{4} + 2 \right) = 96.$



Ответ: 96.

6. Изобразим заданную криволинейную трапецию. При ее вращении вокруг оси абсцисс получаем тело с объемом $V = \pi \int\limits_{-1}^3 (x+1)dx =$

$= \pi \left(\frac{x^2}{2} + x \right)\Bigg|_{-1}^3 = \pi \left(\frac{9}{2} + 3 \right) - \pi \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = 8\pi.$



Ответ: 8π.

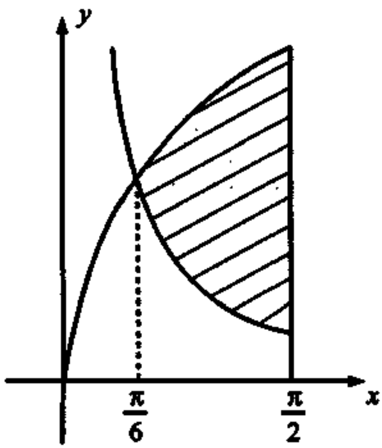
7. Найдем путь, пройденный точкой: $S = \int\limits_3^5 (6t + 2\sin \pi t)dt =$

$= \left(3t^2 - \frac{2}{\pi} \cos \pi t \right)\Bigg|_3^5 = \left(3 \cdot 25 - \frac{2}{\pi} \cos 5\pi \right) - \left(3 \cdot 9 - \frac{2}{\pi} \cos 3\pi \right) = 48.$

Ответ: 48.

8. Вычислим площадь заданной фигуры. Определим точку пересечения линий. Получаем уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} = 8\sin x$ или $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6}$. Площадь фигуры $S = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(8\sin x - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx =$

$= \left(-8\cos x + \operatorname{ctg} x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 8\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$



Ответ: $3\sqrt{3}$.

9. В подынтегральной функции перейдем к сумме функций: $\cos^2 2x \sin 7x = \frac{1+\cos 4x}{2}\sin 7x = \frac{1}{2}\sin 7x + \frac{1}{2}\sin 7x \cos 4x = \frac{1}{2}\sin 7x +$ $+ \frac{1}{4}\sin 11x + \frac{1}{4}\sin 3x$. Теперь вычислим неопределенный интеграл: $\int \cos^2 2x \sin 7x\, dx = \int\left(\frac{1}{2}\sin 7x + \frac{1}{4}\sin 11x + \frac{1}{4}\sin 3x\right)dx = -\frac{1}{14}\cos 7x -$ $-\frac{1}{44}\cos 11x - \frac{1}{12}\cos 3x + C.$

Ответ: $-\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{44}\cos 11x - \frac{1}{12}\cos 3x + C.$

10. Избавимся от иррациональности в знаменателе подынтегральной функции: $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}} = \int \frac{(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5})dx}{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5})(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5})} =$

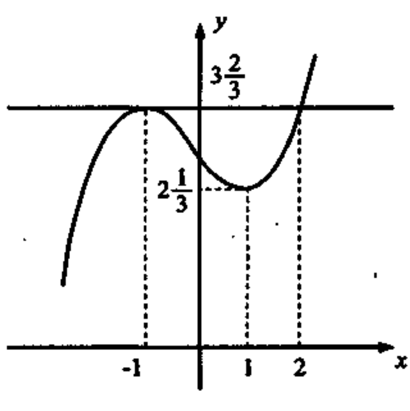
$$= \frac{1}{3}\int (\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5})dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left((x-2)^{\frac{3}{2}}-(x-5)^{\frac{3}{2}}\right)+C =$$

$$= \frac{2}{9}\left((x-2)^{\frac{3}{2}}-(x-5)^{\frac{3}{2}}\right)+C.$$

Ответ: $\frac{2}{9}\left((x-2)^{\frac{3}{2}}-(x-5)^{\frac{3}{2}}\right)+C.$

11. Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+3$ в точке $x_0=-1$ и получим: $y=(x_0^2-1)(x-x_0)+$ $+\frac{1}{3}x_0^3-x_0+3$ или $y=3\frac{2}{3}$. Найдем точку пересечения графиков функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+3$ и $y=3\frac{2}{3}$. Получаем уравнение $\frac{1}{3}x^3-x+3=3\frac{2}{3}$ или $x^3-3x-2=0$, корни которого $x=-1$ и $x=2$. Тогда площадь заданной фигуры $S=\int\limits_{-1}^{2}\left(3\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x^3+x-3\right)dx=$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{2}(2-x^3+3x)dx=\frac{1}{3}\left(2x-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{1}{3}\left((4-4+6)-\left(-2-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)\right)=2\frac{1}{4}.$$

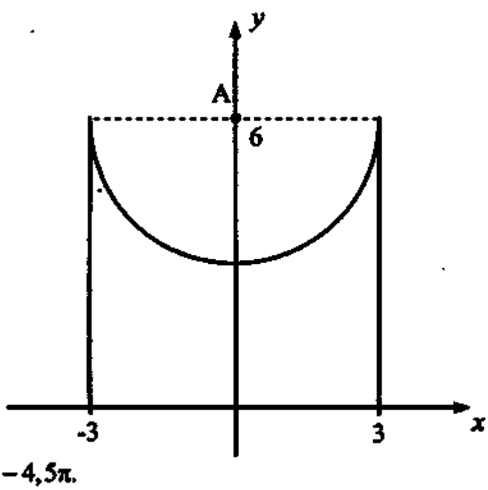


Ответ: $2\frac{1}{4}$.

12. Запишем интеграл в виде $I=\int x\sin^2 3x\,dx=\frac{1}{2}\int x(1-\cos 6x)\,dx=$ $=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\int x\cos 6x\,dx$. Последний интеграл вычисляется методом интегрирования по частям: $\int x\cos 6x\,dx$. Будем считать, что $u=x$, $dV=\cos 6x\,dx$, тогда $du=dx$ и $V=\int\cos 6x\,dx=\frac{1}{6}\sin 6x$. Получаем: $\int x\cos 6x\,dx=\frac{1}{6}x\sin 6x-\frac{1}{6}\int\sin 6x\,dx=\frac{1}{6}x\sin 6x+\frac{1}{36}\cos 6x$. Окончательно находим интеграл: $I=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{12}x\sin 6x-\frac{1}{72}\cos 6x+C$.

Ответ: $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{12}x\sin 6x-\frac{1}{72}\cos 6x+C$.

13. Построим график подынтегральной функции $y=6-\sqrt{9-x^2}$. Получаем: $\sqrt{9-x^2}=6-y$ (где $6-y\geq 0$, т. е. $y\leq 6$) или $x^2+(y-6)^2=3^2$. Это уравнение нижней полуокружности с центром в точке $A(0;\ 6)$ и радиусом 3. Теперь легко вычислить площадь построенной фигуры, состоящей из квадрата (со стороной 6) без полукруга радиусом 3. Получаем: $S=6^2-\frac{1}{2}\pi\cdot 3^2=36-4{,}5\pi$.



Ответ: $36-4{,}5\pi$.

14. Для вычисления $\int\limits_1^3 f(3x-1)dx$ введем новую переменную $t=3x-1$, тогда $dt=3dx$ и $dx=\frac{1}{3}dt$. Получаем: $\int\limits_1^3 f(3x-1)dx=$ $=\frac{1}{3}\int\limits_2^8 f(t)dt=\frac{1}{3}\cdot 6=2$. При этом $\int\limits_2^8 f(x)dx=\int\limits_2^8 f(t)dt$ (очевидно, что безразлично, какой буквой обозначена переменная интегрирования). При замене переменной пересчитываются границы интегрирования.

Ответ: 2.

Глава IV
Показательная и логарифмическая функции

§ 9. Обобщение понятия степени

Уроки 27–28. Корень n-й степени и его свойства

Цели: обобщить понятие квадратного корня на корень n-й степени и рассмотреть его свойства.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Изучение нового материала

Сначала необходимо обсудить с учащимися **понятие квадратного корня из числа a: это такое число, квадрат которого равен числу a.** Другими словами: x – квадратный корень из числа a, если выполнено равенство $x^2 = a$, т. е. x – решение уравнения $x^2 = a$.

Предложите ученикам по аналогии ввести понятие корня n-й степени из числа a. Обобщение совершенно очевидно: **корнем n-й степени из числа a называется такое число x, n-я степень которого равна a.** Другими словами: x – решение уравнения $x^n = a$.

Пример 1

а) Число 4 является корнем третьей степени из числа 64, так как выполнено равенство $4^3 = 64$.

б) Числа 2 и –2 являются корнями четвертой степени из числа 16, так как выполнены равенства: $2^4 = 16$ и $(-2)^4 = 16$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^n$. На промежутке $[0; \infty)$ эта функция возрастает и принимает все значения из интервала $[0; \infty)$. Тогда по теореме о корне **уравнение** $x^n = a$ для любого $a \in [0; \infty)$ **имеет единственный неотрицательный корень.** Этот корень называют **арифметическим корнем n-й степени из числа a** и обозначают символом $\sqrt[n]{a}$. При этом натуральное **число n** ($n \geq 2$) называют **показателем корня, число a – подкоренным выражением.** Символ $\sqrt[n]{}$ называют **радикалом.** Заметим, что в случае квадратного корня $n = 2$ не указывается (пишут просто $\sqrt{a}$, а не $\sqrt[2]{a}$).

Итак, арифметическим корнем n-й степени из числа a называют неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Пример 2

а) По определению $\sqrt[5]{32}=2$, так как выполнено равенство $2^5=32$ и $2>0$.

б) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\frac{2}{3}$, так как выполнено равенство $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$ и $\frac{2}{3}>0$.

При четных n функция $f(x)=x^n$ является четной. Тогда при $a>0$ уравнение $x^n=a$ имеет два корня $x_1=\sqrt[n]{a}$ и $x_2=-\sqrt[n]{a}$. При $a=0$ уравнение имеет один корень $x=0$. При $a<0$ уравнение корней не имеет, так как четная степень любого числа – величина неотрицательная.

Таким образом, при четном n существуют два корня n-й степени из любого положительного числа a; корень n-й степени из числа 0 равен нулю; корней четной степени из отрицательных чисел не существует.

Пример 3

Уравнение $x^4=625$ имеет два корня: это числа 5 и -5. Поэтому существуют два корня четвертой степени из числа 625. При этом $\sqrt[4]{625}=5$ – неотрицательное число и является **арифметическим корнем** четвертой степени из числа 625, тогда $-5=-\sqrt[4]{625}$.

При нечетных n функция $f(x)=x^n$ возрастает на всей числовой прямой, ее область значений – множество всех действительных чисел. Поэтому по теореме о корне уравнение $x^n=a$ имеет единственный корень при любом значении a (в том числе и при $a<0$). Такой корень для любого значения a обозначают $\sqrt[n]{a}$. Для корней нечетной степени выполняется равенство $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$. Такое равенство позволяет выразить корень из отрицательного числа через **арифметический корень.**

Пример 4

а) $\sqrt[3]{-125}=-\sqrt[3]{125}=-5$ (при этом $\sqrt[3]{125}$ – арифметический корень).

б) $\sqrt[5]{-83}=-\sqrt[5]{83}$ (очевидно, что $\sqrt[5]{83}$ – арифметический корень).

По определению корня n-й степени для любого действительного числа x справедливо равенство:

$$\sqrt[n]{x^n}=\begin{cases}|x|, \text{ если } n \text{ – четное натуральное число;}\\ x, \text{ если } n \text{ – четное натуральное число.}\end{cases}$$

Пример 5

а) $\sqrt[6]{(-31)^6}=|-31|=31$ (использовали первую часть равенства).

б) $\sqrt[5]{(-23)^5}=-23$ (применили вторую часть равенства).

Теперь необходимо напомнить **свойства арифметических корней *n*-й степени. Для любого натурального числа *n*, целого числа *k*** и любых **неотрицательных чисел *a* и *b*** справедливы **равенства:**

1) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ (корень из произведения чисел равен произведению корней той же степени из этих чисел);

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$ (корень из частного чисел равен отношению корней той же степени из этих чисел);

3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $(k>0)$ (корень из корня числа равен корню степени, равной произведению степеней корней, из этого числа);

4) $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$ $(k>0)$;

5) $\sqrt[n]{a^k}=(\sqrt[n]{a})^k$ (если $k\le 0$, то $a\neq 0$).

Если $a \le a < b$, то $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$ (из неотрицательных чисел можно извлечь корень и знак неравенства сохраняется).

Пример 6

Упростим выражения:

а) $\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{2}=\sqrt[5]{16\cdot 2}=\sqrt[5]{32}=2$ (по свойству 1);

б) $\sqrt[3]{2\dfrac{10}{27}}=\sqrt[3]{\dfrac{64}{27}}=\dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}}=\dfrac{4}{3}$ (по свойству 2);

в) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[4\cdot 3]{5}=\sqrt[12]{5}$ (по свойству 3);

г) $\sqrt[12]{27}=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[4]{3}$ (по свойству 4);

д) $\sqrt[4]{256^3}=(\sqrt[4]{256})^3=4^3=64$ (по свойству 5);

е) так как $0<5<7$, то: $\sqrt[3]{5}<\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[8]{5}<\sqrt[8]{7}$, $\sqrt[13]{5}<\sqrt[13]{7}$ и т. д. (по свойству 6).

Пример 7

Сравним числа:

а) $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt{2}$. Представим данные корни в виде корней одной и той же степени, используя свойство 4. Получаем: $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$ и $\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$. Так как $9>8>0$, то по свойству 6 имеем: $\sqrt[6]{9}>\sqrt[6]{8}$ или $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$;

б) $\sqrt[n+1]{a^n}$ и $\sqrt[n]{a^{n+1}}$ (при $a>1$, $n\in N$ и $n\geq 2$). Используя свойство 4, представим данные корни в виде корней одинаковой степени. Получаем: $\sqrt[n+1]{a^n}=\sqrt[(n+1)n]{(a^n)^n}=\sqrt[(n+1)n]{a^{n^2}}$ и $\sqrt[n]{a^{n+1}}=\sqrt[n(n+1)]{(a^{n+1})^{n+1}}=\sqrt[n(n+1)]{a^{(n+1)^2}}$.

Так как $0<a^{n^2}<a^{(n+1)^2}$, то по свойству 6 имеем: $\sqrt[(n+1)n]{a^{n^2}}<\sqrt[n(n+1)]{a^{(n+1)^2}}$ или $\sqrt[n+1]{a^n}<\sqrt[n]{a^{n+1}}$.

Во многих случаях требуется выполнять операции **вынесения из-под корня и внесение под корень** некоторых выражений. В случае корней четной степени учащиеся, как правило, допускают ошибки. еще раз напомним, что $\sqrt[n]{x^n}=|x|$, если n – четное натуральное число.

Пример 8

а) Вынесем множитель за знак корня $\sqrt[4]{16a^6b^5}$.

Учтем ОДЗ данного выражения: a – любое действительное число, $b\geq 0$. Используя свойства корней, получаем: $\sqrt[4]{16a^6b^5}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{a^6}\cdot\sqrt[4]{b^5}=$ $=2\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[4]{b^4}\cdot\sqrt[4]{b}=2|a|\cdot\sqrt{|a|}\cdot|b|\cdot\sqrt[4]{b}=2|a|\cdot b\cdot\sqrt{|a|}\cdot\sqrt[4]{b}$ (учтено, что $b\geq 0$ и $|b|=b$) $=\begin{cases}2ab\sqrt{a}\sqrt[4]{b} \text{ при } a\geq 0\\ -2ab\sqrt{-a}\sqrt[4]{b} \text{ при } a<0\end{cases}$.

б) Внесем множитель под знак корня $3ab\sqrt[6]{b}$.

ОДЗ данного выражения: $b\geq 0$ и a – любое действительное число, поэтому необходимо рассмотреть два случая:

1) Если $a\geq 0$, то $a=|a|$ и $3ab\sqrt[6]{b}=\sqrt[6]{3^6}\cdot|a|\cdot\sqrt[6]{b^6}\cdot\sqrt[6]{b}=\sqrt[6]{729}\sqrt[6]{|a|^6\cdot b^6\cdot b}=$ $=\sqrt[6]{729a^6b^7}$.

2) Если $a<0$, то $-a=|a|$ и $3ab\sqrt[6]{b}=-3\cdot(-1)b\sqrt[6]{b}=-3|a|b\sqrt[6]{b}=$ $=-\sqrt[6]{3^6|a|^6b^6b}=-\sqrt[6]{729a^6b^7}$.

Итак, данное выражение $3ab\sqrt[6]{b}=\begin{cases}\sqrt[6]{729a^6b^7} \text{ при } a\geq 0\\ -\sqrt[6]{729a^6b^7} \text{ при } a<0\end{cases}$.

Понятие корня n-й степени необходимо и при решении **уравнений и неравенств.**

Пример 9

Решим неравенство $x^4\geq 5$.

Такое неравенство равносильно неравенству $x^4-5\geq 0$. Функция $f(x)=x^4-5$ непрерывна, и можно использовать метод интервалов. Уравнение $x^4-5=0$ имеет два корня: $\sqrt[4]{5}$ и $-\sqrt[4]{5}$. Эти числа разбивают числовую прямую на три интервала. Решение данного неравенства – объединение двух из этих промежутков: $x\in(-\infty;-\sqrt[4]{5}]\cup[\sqrt[4]{5};\infty)$.

III. Задание на уроках

№ 384 (б, в); 385 (а); 386 (а); 387 (г); 391 (а, в); 394 (б); 399 (а); 400 (б); 401 (а); 403 (в, г); 406 (б, в); 409 (г); 411 (в); 414 (г); 415 (а, б).

IV. Контрольные вопросы

1. Дайте определение корня n-й степени из числа.
2. Что называют арифметическим корнем n-й степени из числа?
3. Напишите основные свойства корней (фронтально, у доски).

V. Задание на дом

№ 384 (а, г); 386 (б, в); 387 (в); 392 (г); 394 (г); 399 (б); 400 (в); 401 (г); 402 (б, в); 406 (а, г); 409 (б); 412 (г); 414 (а); 415 (в, г).

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 29–30. Иррациональные уравнения и неравенства

Цель: рассмотреть основные типы иррациональных уравнений и неравенств и способы их решения.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Сравните числа:

а) $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[4]{3}$; б) $\sqrt[3]{-0,5}$ и $\sqrt[5]{-0,3}$.

2. Упростите выражение $3\sqrt[5]{a^5}+2\sqrt[4]{a^4}+a$ (при $a\le 0$).

3. Решите неравенство $(x^4-2)(x^3+1)\ge 0$.

Вариант 2

1. Сравните числа:

а) $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[3]{4}$; б) $\sqrt[3]{-0,2}$ и $\sqrt[5]{-0,4}$.

2. Упростите выражение $4\sqrt[7]{a^7}-3\sqrt[6]{a^6}-5a$ (при $a\le 0$).

3. Решите неравенство $(x^6-3)(x^3+8)\le 0$.

III. Изучение нового материала

Уравнение (неравенство), в котором **под знаком корня** содержится **переменная**, называют **иррациональным**.

Пример 1

а) Уравнения и неравенства: $\sqrt[3]{3x-2}=4$; $\sqrt{x-3}\le 2$; $\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[5]{x+1}=1$; $\sqrt[4]{x+3}+3x\ge 5-x$ – являются иррациональными, так как под знаком радикала находится переменная.

б) Уравнения и неравенства: $3\sqrt{2-\sqrt{3}}x^2+5\sqrt{7}x-2=0$; $\sqrt[5]{4-2\sqrt[3]{6}}+$ $+x^2\sqrt[7]{2}\le 0$; $(\sqrt[3]{9}-2)x=\sqrt[4]{7}-1$; $(\sqrt[4]{5}-\sqrt{3})x\le\sqrt[3]{2\sqrt{3}-1}$ – не являются иррациональными, так как переменная не находится под знаком корня. Отметим, что под знаками корня содержатся какие-то числа. При этом первое уравнение и второе неравенство являются квадратными. Третье уравнение и четвертое неравенство являются линейными.

Введем два важнейших понятия, полезных при решении иррациональных уравнений и неравенств. Первое из них – **область допустимых значений** (ОДЗ) – вам уже знакомо. **ОДЗ называется множество значений переменной, при которых уравнение или неравенство имеет смысл.** В рассматриваемой теме ОДЗ, как правило, определяется возможностью извлечения корня четной степени из выражений.

Пример 2

ОДЗ уравнения $\sqrt{3x-2}-\sqrt[4]{9-x^2}=5$ задается неравенствами $\begin{cases}3x-2\ge 0\\ 9-x^2\ge 0\end{cases}$, решение которых $\begin{cases}x\ge\dfrac{2}{3}\\ -3\le x\le 3\end{cases}$, откуда $x\in\left[\dfrac{2}{3};3\right]$. Этот промежуток является ОДЗ данного уравнения.

В ряде случаев нахождение ОДЗ позволяет решить уравнение или неравенство.

Пример 3

Решим неравенство $2\sqrt[4]{x^2-5x+4}+\sqrt{-x^2+6x-8}\ge 1-\sqrt[3]{3x-4}$.

ОДЗ данного неравенства задается условиями $\begin{cases}x^2-5x+4\ge 0\\ -x^2+6x-8\ge 0\end{cases}$.

Решение этих неравенств $\begin{cases}x\in(-\infty;\ 1]\cup[4;\ \infty)\\ x\in[2;\ 4]\end{cases}$, откуда $x=4$. Видно, что ОДЗ неравенства состоит из одной точки $x=4$. Проверим, является ли это число решением данного неравенства. Подставим его в неравенство и получим: $2\sqrt[4]{0}+\sqrt{0}\ge 1-\sqrt[3]{12-4}$ или $0\ge -1$. Получили верное неравенство. Поэтому решение данного неравенства – число $x=4$.

Другим важным понятием при решении является **область существования решений (ОСР), т. е. множество значений переменной,** при которых **решение** уравнения или неравенства **возможно.**

Пример 4

Рассмотрим уравнение $\sqrt[6]{3x^3-2x^4+5x+1}=x-2$.

В левой части уравнения находится арифметический корень четной степени: По определению эта величина неотрицательная. Поэтому в правой части уравнения может стоять только неотрицательное выражение. Получаем условие $x-2\ge 0$, которое определяет ОСР. Следовательно, ОСР данного уравнения – все значения x из промежутка $[2;\ \infty)$.

Очевидно, что **решение** иррационального уравнения или неравенства может находиться только в **множестве** значений переменной, **которое является пересечением ОДЗ и ОСР.**

Пример 5

Решим неравенство $\sqrt[4]{-x^2+6x-8}\le x-5$.

ОДЗ неравенства задается условием $-x^2+6x-8\ge 0$, решение которого $x\in[2;\ 4]$. Так как в левой части данного неравенства находится неотрицательная величина (арифметический корень четной степени), то и правая часть должна быть неотрицательной $x-5\ge 0$, откуда $x\in[5;\ \infty)$ – ОСР.

Видно, что пересечение ОДЗ и ОСР неравенства является пустым множеством. Поэтому данное неравенство решений не имеет.

Заметим, что одним из приемов решения иррациональных уравнений и неравенств является **возведение в степень** обеих частей. В случае уравнений такая операция может привести к **появлению посторонних корней,** которые легко **удаляются при проверке.** При решении неравенств необходимо внимательно контролировать ОДЗ и ОСР. Полезно **сочетать аналитическое решение с графическим** как в случае уравнений, так и в случае неравенств.

Остановимся сначала на **основных типах** иррациональных уравнений и способах их решения. Систематизация этих типов весьма условна.

1. Уравнения с одним знаком радикала

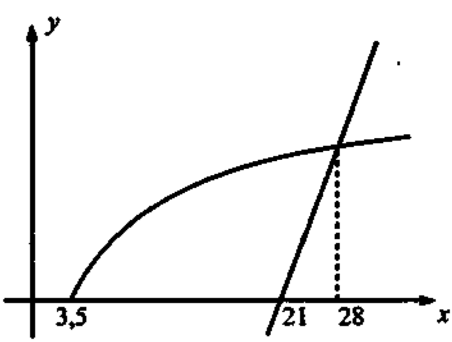
Пример 6

Решим уравнение $21+\sqrt{2x-7}=x$.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{2x-7}=x-21$ и решим его двумя способами. Учтем, что для уравнения ОДЗ: $x\in\left[\frac{7}{2};\infty\right)$ и ОСР: $x\in[21;\infty)$. Поэтому корни уравнения могут находиться только в промежутке $x\in[21;\infty)$.

1 способ. Возведем обе части уравнения в квадрат: $2x-7=$ $=x^2-42x+441$ или $0=x^2-44x+448$. Корни этого квадратного уравнения $x_1=28$ и $x_2=16$. Для данного иррационального уравнения корень $x=16$ является посторонним, так как не входит в ОСР.

Для иллюстрации построим графики функций $y_1=\sqrt{2x-7}$ и $y_2=x-21$.



Видно, что эти графики пересекаются в единственной точке, абсцисса которой $x=28$ и является корнем данного уравнения.

Недостаток этого способа решения – достаточно громоздкие коэффициенты полученного квадратного уравнения $0=x^2-44x+448$.

2 способ. Введем новую переменную $t=\sqrt{2x-7}$ (где $t\geq 0$) и выразим x: $t^2=2x-7$ и $x=\dfrac{t^2+7}{2}$. Тогда данное уравнение имеет вид:

$21+t=\dfrac{t^2+7}{2}$ или $0=t^2-2t-35$ (заметим, что коэффициенты этого квадратного уравнения небольшие), корни которого $t_1 = 7$ и $t_2 = -5$ (не подходит, так как $t \geq 0$). Вернемся к старой переменной и найдем корень данного уравнения: $x=\dfrac{7^2+7}{2}=28.$

Из приведенного примера видно, что эффективным приемом является **использование новой переменной (замена переменной)**.

Пример 7

Решим уравнение $x^2-4x-3\sqrt{x^2-4x+20}+10=0.$

Введем новую переменную $t=\sqrt{x^2-4x+20}$ (где $t \geq 0$) и выразим соотношение x^2-4x. Имеем: $t^2=x^2-4x+20$, откуда $x^2-4x=t^2-20$. Тогда данное уравнение имеет вид: $t^2-20-3t+10=0$ или $t^2-3t-10=0$. Корни этого уравнения $t_1 = 5$ и $t_2 = -2$ (не подходит, так как $t \geq 0$). Вернемся к старой переменной и получим квадратное уравнение: $5^2=x^2-4x+20$ или $0=x^2-4x-5$, корни которого $x_1 = 5$ и $x_2 = -1$. Оба этих корня являются также корнями исходного уравнения.

2. Уравнения с двумя знаками радикала

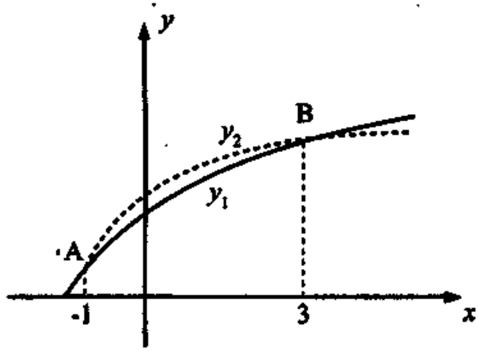
Пример 8

Решим уравнение $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1.$

Обсудим способы решения подобных уравнений.

1 способ. Такой способ является традиционным и состоит в **уединении радикала и возведении** обеих частей уравнения в степень. Отметим, что ОДЗ уравнения $x \in [-1; \infty)$. Запишем уравнение в виде $\sqrt{2x+3}=1+\sqrt{x+1}$ и возведем обе части уравнения в квадрат: $2x+3=1+2\sqrt{x+1}+x+1$. Тогда $x+1=2\sqrt{x+1}$. Вновь возведем обе части уравнения в квадрат: $(x+1)^2=4(x+1)$ или $(x+1)(x-3)=0$. Корни этого уравнения $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$ также являются решениями данного уравнения.

Проиллюстрируем наше решение графически. Построим графики функций $y_1=\sqrt{2x+3}$ (сплошная линия) и $y_2=1+\sqrt{x+1}$ (штрих-пунктирная линия).



Видно, что графики имеют две общие точки A и B, абсциссы $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$ которых являются корнями иррационального уравнения.

2 способ. Введем новую переменную $t = \sqrt{x+1}$ (где $t \geq 0$). Тогда $t^2 = x+1$ и $x = t^2 - 1$. Данное уравнение имеет вид $\sqrt{2t^2+1} - t = 1$ и представляет собой уравнение уже **с одним радикалом**. Далее его можно решить, например, традиционным способом. Запишем уравнение в виде $\sqrt{2t^2+1} = t+1$ и возведем в квадрат обе части уравнения: $2t^2+1 = t^2+2t+1$ или $t(t-2)=0$. Корни такого уравнения $t_1 = 0$ и $t_2 = 2$ удовлетворяют условию $t \geq 0$. Теперь найдем $x_1 = 0^2 - 1 = -1$ и $x_2 = 2^2 - 1 = 3$.

3 способ. Введем две новые переменные $a = \sqrt{2x+3}$ и $b = \sqrt{x+1}$ (где a, $b \geq 0$). Тогда одно уравнение легко записать сразу: $a - b = 1$, чтобы получить второе уравнение, возведем величины a и b в квадрат: $a^2 = 2x+3$ и $b^2 = x+1$. Для исключения переменной x умножим второе соотношение на 2 и вычтем из первого: $a^2 - 2b^2 = 1$. Таким образом, исходное иррациональное уравнение свелось к системе алгебраических уравнений $\begin{cases} a-b=1 \\ a^2-2b^2=1 \end{cases}$. При этом для нахождения x достаточно найти любую из величин a или b.

Из первого уравнения выразим $a = b + 1$ и подставим во второе: $(b+1)^2 - 2b^2 = 1$ или $0 = b(b-2)$. Корни этого уравнения $b_1 = 0$ и $b_2 = 2$ удовлетворяют условию $b \geq 0$ (тогда $a = b + 1$ тем более положительно). Находим $x = b^2 - 1$ и получаем $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$.

Последний способ решения **полезен** и в случае уравнений других типов.

3. Однородные иррациональные уравнения

Пример 9

Решим уравнение $\sqrt[3]{(x-1)^2} - 3\sqrt[3]{(x+1)^2} = 2\sqrt[3]{x^2-1}$.

Так как в уравнение входят корни нечетной степени, то x может быть любым действительным числом. Введем новые переменные $a = \sqrt[3]{x-1}$ и $b = \sqrt[3]{x+1}$. Тогда уравнение имеет вид: $a^2 - 3b^2 = 2ab$ или $a^2 - 2ab - 3b^2 = 0$. Левая часть этого уравнения представляет собой **однородный многочлен** второй степени по переменным a и b. Решая полученное квадратное уравнение (считая, что a – неизвестная, b – постоянная величина), найдем $a = -b$ и $a = 3b$. Вернемся к неизвестной x. Имеем два случая:

а) $a = -b$ или $\sqrt[3]{x-1} = -\sqrt[3]{x+1}$. Возведем обе части уравнения в куб: $x-1 = -(x+1)$ и найдем $x_1 = 0$.

б) $a = 3b$ или $\sqrt[3]{x-1} = 3\sqrt[3]{x+1}$. Обе части уравнения возводим в куб: $x-1 = 27x+1()$ и находим $x_2 = -\frac{28}{26} = -\frac{14}{13}$.

Итак, данное иррациональное уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{14}{13}$.

4. Уравнения с радикалами больших степеней

Пример 10

Решим уравнение $\sqrt[3]{3x-1} + \sqrt[3]{2x-5} = 3$.

Очевидно, что x может быть любым действительным числом. Введем новые переменные $a = \sqrt[3]{3x-1}$ и $b = \sqrt[3]{2x-5}$. Запишем первое уравнение: $a + b = 3$. Чтобы получить второе уравнение, возведем в куб величины a и b и получим: $a^3 = 3x-1$ и $b^3 = 2x-5$. Для исключения переменной x умножим первое равенство на 2, второе – на 3: $2a^3 = 6x-2$ и $3b^3 = 6x-15$ и вычтем эти соотношения: $2a^3 - 3b^3 = 13$. Таким образом, исходное иррациональное уравнение свелось к системе алгебраических уравнений $\begin{cases} a+b=3 \\ 2a^3-3b^3=13 \end{cases}$.

Из первого уравнения выразим $b = 3-a$ и подставим во второе: $2a^3 - 3(3-a)^3 = 13$ или $5a^3 - 27a^2 + 81a - 94 = 0$. Это кубическое уравнение имеет единственный действительный корень $a = 2$. Находим $x = \frac{a^3+1}{3} = 3$. Итак, данное уравнение имеет одно решение: $x = 3$.

5. Уравнения с громоздкими радикалами

Пример 11.

Решим уравнение $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}=5$.

Каждое подкоренное выражение является полным квадратом. Однако это далеко не очевидно. Введем две новые переменные $a=\sqrt{x+1}$ и $b=\sqrt{x-2}$ (где $x \geq 2$). С помощью этих величин выразим переменную x: $x=a^2-1$ и $x=b^2+2$. Тогда уравнение имеет вид: $\sqrt{a^2-1+2+2a}+\sqrt{b^2+2+7-6b}=5$, или $\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(b-3)^2}=5$, или $|a+1|+|b-3|=5$, или $a+1+|b-3|=5$ (учтено, что $a \geq 0$), или $a+|b-3|=4$. В полученном равенстве раскроем знак модуля и вернемся к неизвестной x.

а) Если $b-3<0$ (т. е. $b<3$ или $\sqrt{x-2}<3$), то равенство имеет вид: $a-b+3=4$, или $a=b+1$, или $\sqrt{x+1}=\sqrt{x-2}+1$. Возведем в квадрат обе части этого уравнения: $x+1=x-2+2\sqrt{x-2}+1$ или $1=\sqrt{x-2}$ (при этом выполнено условие $\sqrt{x-2}<3$). Тогда $1=x-2$ или $x=3$ – корень исходного иррационального уравнения.

б) Если $b-3 \geq 0$ (т. е. $b \geq 3$ или $\sqrt{x-2} \geq 3$), то равенство имеет вид: $a+b-3=4$, или $a+b=7$, или $a=7-b$, или $\sqrt{x+1}=7-\sqrt{x-2}$. Возведем в квадрат обе части этого уравнения: $x+1=49-14\sqrt{x-2}+x-2$ или $23=7\sqrt{x-2}$, откуда $\frac{23}{7}=\sqrt{x-2}$ (при этом выполнено условие $\sqrt{x-2} \geq 3$). Возведем в квадрат обе части такого уравнения: $\frac{529}{49}=x-2$, откуда $x=12\frac{39}{49}$ – также корень данного уравнения.

6. Уравнения, в которых важна группировка членов

Даже в достаточно сложных уравнениях традиционный способ решения (возведение в степень) дает хорошие результаты, если предварительно сделать группировку членов уравнения.

Пример 12

Решим уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$.

Учтем ОДЗ: $x \in [-1; \infty)$ и запишем уравнение в виде $\sqrt{4x+13}=$ $=\sqrt{3x+12}-\sqrt{x+1}$, учитывая коэффициенты при неизвестной. Возведем в квадрат обе части: $4x+13=3x+12-2\sqrt{3x+12}\cdot\sqrt{x+1}+x+1$ или $0=\sqrt{3x+12}\cdot\sqrt{x+1}$. Очевидно, что уравнение имеет два корня $x_1=-4$ (не входит в ОДЗ) и $x_2=-1$. Итак, исходное иррациональное уравнение имеет единственный корень $x=-1$.

В заключение этой части занятия еще раз отметим полезность и целесообразность введения **новых переменных** (замен неизвестных), рассмотрев следующий пример.

Пример 13

Решим уравнение $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

Понятно, что возведение в куб обеих частей уравнения ничего не даст, так как возникает уравнение девятой степени. Поэтому введем новую неизвестную $t=\sqrt[3]{2x-1}$. Сразу можно написать первое уравнение: $x^3+1=2t$. Чтобы получить второе уравнение, возведем в куб выражение для величины t: $t^3=2x-1$ или $t^3+1=2x$. Получили систему алгебраических уравнений $\begin{cases} x^3+1=2t \\ t^3+1=2x \end{cases}$.

Вычтем уравнения друг из друга: $x^3-t^3=2(t-x)$. Перенесем все члены уравнения в левую часть и разложим ее на множители: $(x-t)(x^2+xt+t^2)+2(x-t)=0$ или $(x-t)(x^2+xt+t^2+2)=0$.. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем: $x-t=0$ (т. е. $x=t$) и $x^2+xt+t^2+2=0$ (это уравнение не имеет решений, так как дискриминант $D=t^2-4(t^2+2)=$ $=-3t^2-8<0$ при всех значениях t). Подставим $t=x$ в первое уравнение системы и получим кубическое уравнение: $x^3+1=2x$ или $x^3-2x+1=0$, которое имеет корни $x_1=1$ и $x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Эти корни являются также решениями данного иррационального уравнения.

IV. Задание на уроках

№ 417 (а, г); 418 (б); 419 (а); 420 (г); 422 (а, в); 423 (г); 424 (а, в); 425 (а).

V. Контрольные вопросы

1. Какие уравнения (неравенства) называются иррациональными? Приведите примеры.
2. Дайте определение области допустимых значений (ОДЗ).
3. Что называется областью существования решений (ОСР) уравнения или неравенства?

VI. Задание на дом

№ 417 (б, в); 418 (г); 419 (в); 420 (в); 422 (б, г); 423 (б); 424 (б, г); 425 (г).

VII. Творческие задания

Решите уравнения:

1) $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}}=4$; 2) $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}=1$;

3) $\sqrt{x^2-x-1}+\frac{3}{\sqrt{x^2-x-1}}=13$; 4) $\sqrt{x^2-x+6}+\frac{3}{\sqrt{x^2-x+6}}=7$;

5) $x^2+\sqrt{x^2-x+9}=3+x$; 6) $x^2+2\sqrt{x^2-3x+11}=3x+4$;

7) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$; 8) $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x$;

9) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}=2$; 10) $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}=3$;

11) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$;

12) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

Ответы: 1) $x_1=-\frac{3}{2}, x_2=\frac{1}{2}$; 2) $x=\frac{5}{2}$; 3) $x_1=-1, x_2=2$; 4) $x_1=-5$, $x_2=6$; 5) $x_1=0, x_2=1$; 6) $x_1=1, x_2=2$; 7) $x_1=0, x_2=5$; 8) $x=7$; 9) $x\in[-1; 1]$; 10) $x\in[2; \infty)$; 11) $x\in[2; \infty)$; 12) $x\in[5; 10]$.

VIII. Подведение итогов уроков

Уроки 31–32. Системы иррациональных уравнений. Иррациональные неравенства

Цели: рассмотреть наиболее типичные системы иррациональных уравнений; обсудить решение иррациональных неравенств.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определение области допустимых значений (ОДЗ) уравнения или неравенства. Приведите примеры.

2. Решите уравнения:

а) $\sqrt[3]{45-2x^2}=3$;

б) $\sqrt{3x-2}=5x-8$;

в) $\sqrt{3x+1}+2\sqrt{5x-1}=6$.

Вариант 2

1. Дайте определения области существования решений (ОСР) уравнения или неравенства. Приведите примеры.

2. Решите уравнения:

а) $\sqrt[3]{3x^2+15}=3$;

б) $\sqrt{5x+1}=3x-5$;

в) $\sqrt{5x+6}+2\sqrt{x+2}=8$.

III. Изучение нового материала

Прежде всего остановимся на **системах иррациональных уравнений**. Как правило, такие системы решаются с помощью **замены переменных** (или переменной).

Пример 1

Решим систему уравнений $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3\\ x+y=9\end{cases}$.

Введем две новые переменные $a=\sqrt[3]{x}$ и $b=\sqrt[3]{y}$. Тогда получим систему алгебраических уравнений $\begin{cases}a+b=3\\ a^3+b^3=9\end{cases}$. Левую часть второго уравнения разложим на множители: $\begin{cases}a+b=3\\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=9\end{cases}$ и подставим первое уравнение во второе. Приходим к симметричной системе уравнений $\begin{cases}a+b=3\\ a^2-ab+b^2=3\end{cases}$. Из первого уравнения выразим $b=3-a$ и подставим во второе. Получаем: $a^2-a(3-a)+(3-a)^2=3$ или $a^2-3a+2=0$. Корни этого уравнения $a_1=1$ и $a_2=2$. Соответствующие значения $b_1=2$ и $b_2=1$. Вернемся к старым переменным и получим две простейшие системы уравнений: $\begin{cases}\sqrt[3]{x}=1\\ \sqrt[3]{y}=2\end{cases}$ (решение $x=1$, $y=8$) и $\begin{cases}\sqrt[3]{x}=2\\ \sqrt[3]{y}=1\end{cases}$ (решение $x=8$, $y=1$). Таким образом, данная система уравнений имеет два решения: (1; 8) и (8; 1).

Пример 2

Решим систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2}\\ x^2+y^2=17\end{cases}$.

Сначала рассмотрим первое уравнение. Введем для него новую неизвестную $t=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$. Тогда уравнение имеет вид: $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{5}{2}$ или $2t^2-5t+2=0$. Корни этого уравнения $t_1=2$ (тогда $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=2$ и $x=4y$) и $t_2=\dfrac{1}{2}$ (откуда $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{1}{2}$ и $y=4x$). Вернемся к старым переменным и получим системы алгебраических уравнений: $\begin{cases}x=4y\\ x^2+y^2=17\end{cases}$ (решения $x=4, y=1$ и $x=-4, y=-1$) и $\begin{cases}y=4x\\ x^2+y^2=17\end{cases}$ (решения $x=1, y=4$ и $x=-1$, $y=-4$). Таким образом, исходная система имеет четыре решения: (4; 1), (−4; −1), (1; 4), (−1; −4).

Достаточно часто при решении систем иррациональных уравнений их необходимо преобразовать и найти более простую связь между неизвестными.

Пример 3

Решим систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=2\\ \sqrt{x^2-y}+\sqrt{x^2+y}=4\end{cases}$.

Возведем первое уравнение в квадрат и получим: $x+\sqrt{y}-2\sqrt{x^2-y}+x-\sqrt{y}=4$ или $x-2=\sqrt{x^2-y}$. Учтем, что $x-2\geq 0$ (т. е. $x\geq 2$ – ОСР), и вновь возведем обе части уравнения в квадрат:

$x^2-4x+4=x^2-y$, откуда $y=4x-4$. Таким образом, нашли линейную связь между неизвестными x и y.

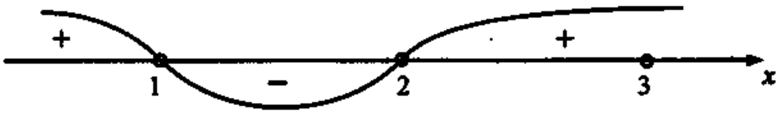
Подставим соотношение $y=4x-4$ во второе уравнение системы: $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+4x-4}=4$, или $|x-2|+\sqrt{x^2+4x-4}=4$, или $x-2+\sqrt{x^2+4x-4}=4$ (учтено, что $x \geq 2$ и $|x-2| = x-2$), откуда $\sqrt{x^2+4x-4}=6-x$ (заметим, что $x \leq 6$ – ОСР). Возведем в квадрат обе части уравнения: $x^2+4x-4=36-12x+x^2$ и найдем $x=\frac{40}{16}=\frac{5}{2}$, которое удовлетворяет условиям $2 \leq x \leq 6$. Теперь определим $y=4\cdot\frac{5}{2}-4=6$. Итак, данная система имеет единственное решение $\left(\frac{5}{2}; 6\right)$.

Обратимся теперь к **иррациональным неравенствам**. Если в случае уравнений и систем уравнений, как правило, было конечное число решений (и их можно было легко проверить подстановкой), то в случае неравенств решением являются числовые промежутки, которые подстановкой проверить невозможно. Поэтому в иррациональных **неравенствах** необходимо четко **контролировать ОДЗ и ОСР**.

Пример 4

Решим неравенство $\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3}} \geq \sqrt{3}-2\sqrt{7}$.

ОДЗ неравенства задается условием $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3} \geq 0$. Так как левая часть неравенства по определению арифметического корня неотрицательна, а правая часть является отрицательным числом, то ОСР – любое действительное число x. Поэтому данное неравенство выполняется при всех значениях x, которые входят в ОДЗ. Другими словами, данное неравенство равносильно неравенству: $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3} \geq 0$, или $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-3)} \geq 0$, или $\frac{x-2}{x-1} \geq 0$ и $x \neq 3$. Решая такое неравенство методом интервалов, получим $x \in (-\infty; 1) \cup [2; 3) \cup (3; \infty)$.



Запомните железное правило: обе части неравенства можно возводить в четную степень, если эти части неотрицательны.

Пример 5

Решим неравенство $\sqrt{6x+4} \le 3x-2$.

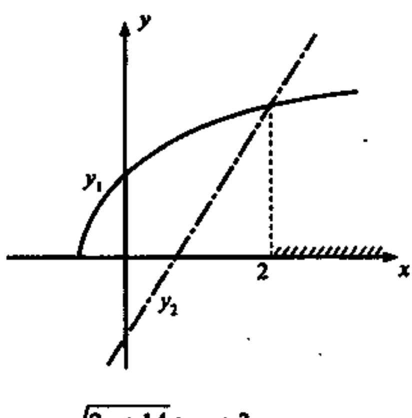
ОДЗ неравенства задается условием $6x+4 \ge 4$, откуда $x \in \left[-\frac{2}{3}; \infty\right)$.

Так как левая часть неотрицательна, то правая часть неравенства тем более должна быть неотрицательной.

Поэтому ОСР определяется условием $3x-2 \ge 0$, откуда $x \in \left[\frac{2}{3}; \infty\right)$.

Так как обе части неравенства неотрицательны, то возведем их в квадрат. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем: $6x+4 \le 9x^2-12x+4$ или $0 \le x(x-2)$. Решение этого квадратного неравенства $x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$. С учетом ОДЗ и ОСР получаем решение данного иррационального неравенства $x \in [2; \infty)$.

Дадим графическую иллюстрацию решения. На рисунке приведены эскизы графиков $y_1 = \sqrt{6x+4}$ (сплошная линия) и $y_2 = 3x-2$ (штрихпунктирная линия). Видно, что неравенство $y_1 \le y_2$ (график y_1 располагается не выше графика y_2) при $x \in [2; \infty)$.



Пример 6

Решим неравенство $\sqrt{2x+14} > x+3$.

ОДЗ неравенства $x \in [-7; \infty)$, ОСР – любое действительное число x.

При этом правая часть неравенства может быть как отрицательной, так и неотрицательной. В связи с этим естественным образом возникает два случая:

а) Если $x + 3 < 0$, то неравенство, очевидно, выполняется при всех x, входящих в ОДЗ. Имеем систему линейных неравенств $\begin{cases} x+3<0 \\ 2x+14\ge 0 \end{cases}$, решение которых $\begin{cases} x<-3 \\ x\ge -7 \end{cases}$, откуда $x\in[-7;\,-3)$.

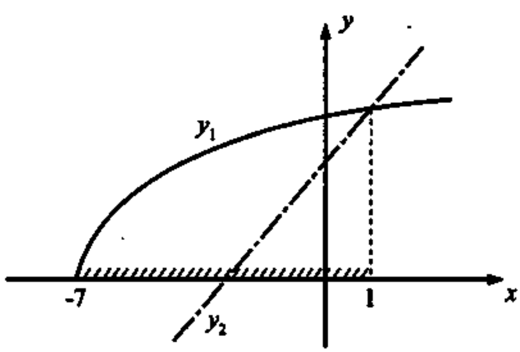
б) Если $x + 3 \ge 0$, то имеем право возвести в квадрат обе части данного иррационального неравенства. Получаем систему неравенств $\begin{cases} x+3\ge 0 \\ 2x+14>(x+3)^2 \end{cases}$.

При этом в силу второго неравенства величина $2x + 14$ больше квадрата некоторого выражения и будет положительной. Поэтому решения второго неравенства (и всей системы этого случая) автоматически входят в ОДЗ. Никаких дополнительных условий записывать не надо.

Решая систему случая б), получаем: $\begin{cases} x\ge -3 \\ 2x+14>x^2+6x+9 \end{cases}$ или $\begin{cases} x\ge -3 \\ 0>x^2+4x-5 \end{cases}$. Решение этих неравенств $\begin{cases} x\ge -3 \\ -5<x<1 \end{cases}$, откуда $x\in[-3;\,1)$.

Объединяя ответы случаев а) и б), получаем окончательное решение данного иррационального неравенства $x\in[-7;\,1)$.

Приведем графическую интерпретацию решения неравенства. Построим эскизы графиков функций $y_1=\sqrt{2x+14}$ (сплошная линия) и $y_2=x+3$ (штрихпунктирная линия). Неравенство $y_1 > y_2$ (т. е. график y_1 лежит выше графика y_2) выполняется при $x\in[-7;\,1)$.



Разумеется, при решении иррациональных неравенств используются те же приемы, что и в случае уравнений и систем уравнений, в частности **замена переменной**.

Пример 7

Решим неравенство $\frac{3}{\sqrt{5-x}}-\sqrt{5-x}<2$.

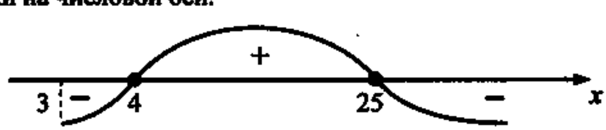
ОДЗ данного неравенства задается условием $5-x>0$, откуда $x<5$. Введем новую переменную $t=\sqrt{5-x}>0$ и получим неравенство $\frac{3}{t}-t<2$. Так как величина $t>0$, то умножим обе части неравенства на t. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем квадратное неравенство: $3-t^2<2t$ или $0<t^2+2t-3$. Его решения $t<-3$ и $t>1$. Так как $t>0$, то неравенство $t<-3$ не выполняется. Рассмотрим неравенство $t>1$ (при этом условие $t>0$ выполнено) или $\sqrt{5-x}>1$. Возведем в квадрат обе неотрицательные части этого неравенства. Получаем: $5-x>1$, откуда $x<4$. Итак, решение данного неравенства $x\in(-\infty;\ 4)$.

Как и при решении неравенств других типов, наиболее **эффективным и мощным методом** решения иррациональных неравенств является **метод интервалов**. Однако использовать его можно только в **области непрерывности** рассматриваемой функции.

Пример 8

Решим неравенство $\frac{\sqrt{x-3}-1}{5-\sqrt{x}}\le 0$.

ОДЗ неравенства задается условиями $\begin{cases} x-3\ge 0 \\ x\ge 0 \\ 5-\sqrt{x}\ne 0 \end{cases}$, откуда $x\in[3;\ 25)\cup(25;\ \infty)$. В этой области левая часть неравенства является непрерывной функцией. Найдем точки, в которых числитель и знаменатель дроби равны нулю. Для этого решаем уравнения $\sqrt{x-3}-1=0$ (корень $x=4$) и $5-\sqrt{x}=0$ (решение $x=25$). Отметим эти точки на числовой оси.



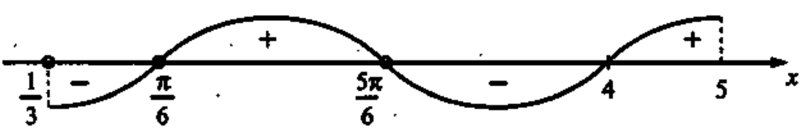
Определим знак величины $\frac{\sqrt{x-3}-1}{5-\sqrt{x}}$, например при $x=9$, и получим: $\frac{\sqrt{9-3}-1}{5-\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{6}-1}{2}>0$. Построим диаграмму знаков левой части неравенства. Теперь легко записать ответ: $x\in[3;\,4]\cup(25;\,\infty)$.

Метод интервалов удобно использовать, если кроме иррациональных функций в неравенство входят и функции других видов.

Пример 9

Решим неравенство $\frac{\sqrt{25-x^2}-3}{\sqrt{3x-1}(2\sin x-1)}\geq 0$.

ОДЗ неравенства задается условиями $\begin{cases}25-x^2\geq 0\\ 3x-1>0\\ \sin x\neq\frac{1}{2}\end{cases}$. Решение первых двух неравенств дает промежуток $\left(\frac{1}{3};\,5\right]$. В этом интервале найдем точки, в которых числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Получаем уравнения: $\sqrt{25-x^2}-3=0$ (корень $x=4$) и $\sin x=\frac{1}{2}$ (решения $x=\frac{\pi}{6}\approx 0{,}5$ и $x=\frac{5\pi}{6}\approx 2{,}5$). Отметим эти точки на числовой прямой.



Определим знак левой части неравенства, например в точке $x=3$, и получим: $\frac{\sqrt{25-3^2}-3}{\sqrt{3\cdot 3-1}(2\sin 3-1)}=\frac{1}{2\sqrt{2}(2\sin 3-1)}<0$. Построим диаграмму знаков дроби. На основании диаграммы выпишем ответ: $x\in\left(\frac{\pi}{6};\,\frac{5\pi}{6}\right)\cup[4;\,5]$.

IV. Задание на уроках

№ 421 (а, б); 426 (в, г); 427 (а, г).

V. Задание на дом

№ 421 (в, г); 426 (а, б); 427 (б, в).

VI. Творческие задания

1. Решите системы иррациональных уравнений:

а) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{x+1}}=2 \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}-\sqrt{\dfrac{y+2}{x+1}}=1{,}5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2+2y+\sqrt{x^2+2y+1}=1 \\ 2x+y=2 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} \dfrac{7}{\sqrt{x-2}}-\dfrac{4}{\sqrt{y+2}}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-2}}+\dfrac{3}{\sqrt{y+2}}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$; г) $\begin{cases} \sqrt{2x+3y}+\sqrt{2x-3y}=10 \\ \sqrt{4x^2-9y^2}=16 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} \sqrt{2x-1}+\sqrt{y+3}=3 \\ 2xy-y+6x=7 \end{cases}$; е) $\begin{cases} \sqrt{2-x}+\sqrt{5-y}=3 \\ 5x+2y-xy=6 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} \sqrt{x^2-4xy-3y^2}=x+1 \\ x+y=1 \end{cases}$; з) $\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{x+y}=6 \\ \sqrt{x+y}-y+x=2 \end{cases}$;

и) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=3 \\ \sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=5 \\ \sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}=4 \end{cases}$; к) $\begin{cases} \sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{y+z}=3 \\ \sqrt[3]{y+z}+\sqrt[3]{z+x}=1 \\ \sqrt[3]{z+x}+\sqrt[3]{x+y}=0 \end{cases}$;

л) $\begin{cases} \sqrt{x-1}=2z-y \\ \sqrt{2-x-x^2}=2y-3z+5 \end{cases}$; м) $\begin{cases} \dfrac{1}{1+(x-y)^2}=z \\ \sqrt{z-1}=8-x-y \end{cases}$.

Ответы: а) (11; 1); б) (2; −2); в) (11; 34); г) (17; −10), (17; 10); д) (1; 1), $\left(\dfrac{5}{2};-2\right)$; е) (1; 1), (−2; 4); ж) (2; −1); з) (2; 2); и) (3; −2; 6); к) (−4; 5; 3); л) (1; 10; 5); м) (4; 4; 1).

2. Решите неравенства:

а) $\sqrt{24-5x}\ge x$; б) $\sqrt{1-4x}>2x+1$;

в) $\sqrt{2x-x^2}>4-x$; г) $\sqrt{x^2-x-1}\le 2x+3$;

д) $\sqrt{2x-1}\ge\sqrt{x+4}$; е) $\sqrt{3x+1}<\sqrt{x+3}$;

ж) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}\le 7$; з) $\sqrt{x-6}-\sqrt{10-x}\ge 1$;

и) $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$;

к) $\sqrt{x^2-2x-2}+\sqrt{x^2-2x+6}<4$;

л) $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}>\frac{x-1}{x}$; м) $\sqrt{9-\frac{9}{x}}<x-\sqrt{x-\frac{9}{x}}$;

н) $\sqrt{x^2-5}+3>|x-1|$; о) $2\sqrt{x^2-x-2}\ge|x+1|-2$.

Ответы: а) $(-\infty; 3]$; б) $(-\infty; 0)$; в) $\varnothing$; г) $\left[-1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};\infty\right)$;

д) $[5;\infty)$; е) $\left[-\frac{1}{3};1\right)$; ж) $\left[\frac{2}{3};6\right]$; з) $\left[\frac{16+\sqrt{7}}{2};10\right]$; и) $(-2;-1]\cup\left[-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$;

к) $\left(-1;1-\sqrt{3}\right]\cup\left[1+\sqrt{3};3\right)$; л) $\left(1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\infty\right)$;

м) $\left[3;\frac{1+\sqrt{37}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{37}}{2};\infty\right)$; н) $\left(-\infty;-\frac{9}{4}\right)\cup\left(\sqrt{5};\infty\right)$;

о) $\left(-\infty;-1\right]\cup\left[\frac{1+2\sqrt{7}}{3};\infty\right)$.

VII. Подведение итогов уроков

Урок 33. Степень с рациональным показателем

Цели: обобщить понятие степени числа и рассмотреть свойства степеней.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7\\3x+2y=23\end{cases}$.

2. Решите неравенство $\sqrt{3x-2} \geq 4-x$.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{3x+2y+4}=8 \\ 4x+3y=30 \end{cases}$.

2. Решите неравенство $\sqrt{3x+1} \geq x-1$.

III. Изучение нового материала

В более ранних классах было определено понятие степени числа с целым показателем. Выражение a^n имеет смысл **при всех целых n и любых значениях a, кроме $a = 0$ и $n \leq 0$.**

Пример 1

а) Выражения $(-3{,}2)^3$, $(-2{,}1)^2$, $(-1{,}5)^0$, $(2{,}3)^4$, 0^2 и т. д. определены.

б) Выражения 0^{-3}, 0^{-7}, 0^0 не имеют смысла.

Напомним свойства таких **степеней**. Для любых чисел a, b и любых целых чисел m и n выполнены равенства:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$; 3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

4) $(ab)^n = a^n b^n$; 5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$; 6) $a^1 = a$, $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$;

7) Если $m > n$, то $a^m > a^n$ при $a > 1$ и $a^m < a^n$ при $0 < a < 1$.

Теперь необходимо понять смысл выражений $3^{0,4}$, $4^{\frac{5}{7}}$, $5^{-\frac{1}{2}}$ и т. д. Для этого надо таким образом **обобщить понятие степени**, чтобы выполнялись все или часть перечисленных свойств степеней. Рассмотрим равенство $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$. Тогда по определению корня n-й степени разумно считать, что $a^{\frac{m}{n}}$ будет корнем n-й степени из числа a^m.

Итак, **степенью числа** $a > 0$ **с рациональным показателем** $r = \dfrac{m}{n}$ (где m – целое число, n – натуральное ($n > 1$)) **называется число** $\sqrt[n]{a^m}$, т. е. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. При этом степень числа 0 определена только для положительных показателей, т. е. $0^r = 0$ для любого $r > 0$.

Пример 2

По определению степени с рациональным показателем и свойствам корней получаем: $7{,}2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7{,}2}$; $2{,}1^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{2{,}1^2} = \sqrt[5]{4{,}41}$; $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$.

Сделаем **ряд замечаний**, связанных с понятием степени с рациональным показателем.

1) Для любого $a > 0$ и любого рационального числа r число $a^r > 0$.

2) По основному свойству дробей рациональное число $\frac{m}{n}$ можно записать в виде $\frac{mk}{nk}$ для любого натурального числа k. Тогда **значение степени не зависит от формы записи рационального числа**, так как $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

3) **При $a < 0$** рациональная **степень** числа a **не определена**. Поясним это примером. Рассмотрим $(-64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-64} = -4$. С другой стороны: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ и тогда $(-64)^{\frac{1}{3}} = (-64)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-64)^2} = \sqrt[6]{64^2} = \sqrt[6]{4^6} = 4$. Получаем противоречие.

Для приведенного определения степени с рациональным показателем **выполняются** все приведенные ранее основные **свойства степеней**, но только для положительных оснований.

Итак, для любых рациональных чисел r и s и любых положительных чисел a и b **справедливы свойства**:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; 2) $a^r : a^s = a^{r-s}$; 3) $(a^r)^s = a^{rs}$;

4) $(ab)^r = a^r \cdot b^r$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$;

6) если $0 < a < b$, то $a^r < b^r$ при $r > 0$ и $a^r > b^r$ при $r < 0$;

7) если $r > s$, то $a^r > a^s$ при $a > 1$ и $a^r < a^s$ при $0 < a < 1$.

Перечисленные свойства доказываются исходя из определения степени с рациональным показателем, свойств корней и свойств степени с целым показателем.

Пример 3

Докажем свойство 1.

Пусть $r = \frac{m}{n}$ и $s = \frac{p}{q}$, где n и q – натуральные числа, m и p – целые. Тогда получаем: $a^r \cdot a^s = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[qn]{a^{np}} = \sqrt[qn]{a^{mq+np}} =$
$= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{r+s}$.

Аналогично доказываются свойства 2–5.

Пример 4

Докажем свойство 6.

Запишем число $r > 0$ в виде $r = \frac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа.
Из неравенства $0 < a < b$ и свойств степени с целым показателем следует, что $a^m < b^m$. По свойству корней из такого неравенства получаем: $\sqrt[n]{a^m} < \sqrt[n]{b^m}$, или $a^{\frac{m}{n}} < b^{\frac{m}{n}}$, или $a^r < b^r$.

Случай $r < 0$ рассматривается аналогично.

Обсудим применение приведенных свойств.

Пример 5

Вычислим выражение $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + 0{,}2^{-4} \cdot 25^{-2} + \left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}$.

Используя свойства степени с рациональным показателем, запишем выражение в виде $(3^{-1})^{-10} \cdot (3^3)^{-3} + (5^{-1})^{-4} \cdot (5^2)^{-2} + \left((2^6)^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3} =$

$3^{10} \cdot 3^{-9} + 5^4 \cdot 5^{-4} + 2^2 = 3^1 + 5^0 + 2^2 = 3 + 1 + 4 = 8.$

Пример 6

Упростим выражение $\frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a + b + \sqrt{ab}}$.

Перейдем к рациональным показателям степени и получим:

$$\frac{a \cdot a^{\frac{1}{2}} - b \cdot b^{\frac{1}{2}}}{a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b} = \frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b} = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b\right)}{a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b} = a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} =$$

$= \sqrt{a} - \sqrt{b}.$

Пример 7

Вычислим выражение $\frac{\left(x^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{xy} + 4y^{\frac{2}{3}}\right)}{(\sqrt[3]{x^4} - 8y\sqrt[3]{x}) : \sqrt[3]{xy}}\left(2 - \sqrt[3]{\frac{x}{y}}\right)$.

Используем определение рационального показателя степени и свойства степеней. Имеем: $\frac{\left(x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 4y^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(x^{\frac{4}{3}} - 8yx^{\frac{1}{3}}\right) : x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}\left(2 - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}\right)$. Для удобства введем новые переменные $a = x^{\frac{1}{3}}$ и $b = y^{\frac{1}{3}}$ и получим:

$$\frac{(a^2+2ab+4b^2)}{(a^4-8ab^3):ab}\left(2-\frac{a}{b}\right)=\frac{(a^2+2ab+4b^2)ab(2b-a)}{a(a^3-8b^3)b}=$$

$$=\frac{(a^2+2ab+4b^2)(2b-a)}{(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)}=-1.$$

В этом примере оказалось целесообразным использование новых переменных, так как можно было сразу перейти к выражению с натуральными показателями степени, с которым удобнее проводить преобразования.

Пример 8

Сравним числа $\sqrt[4]{27}$ и $3^{\frac{4}{5}}$.

Число $\sqrt[4]{27}$ запишем в виде степени с рациональным показателем $\sqrt[4]{27}=3^{\frac{3}{4}}$. Так как $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$, то по последнему свойству степеней $3^{\frac{3}{4}}<3^{\frac{4}{5}}$ или $\sqrt[4]{27}<3^{\frac{4}{5}}$.

IV. Задание на уроке

№ 428 (а, г); 429 (б, в); 430 (б); 431 (г); 433 (а); 435 (в); 436 (а, б); 437 (г); 438 (в); 439 (а); 441 (а, б); 443 (а); 444 (в, г).

V. Контрольные вопросы

1. Дайте определение степени числа с рациональным показателем.
2. В каком случае определена степень числа 0?
3. Перечислите основные свойства степеней числа (фронтальный опрос).

VI. Задание на дом

№ 428 (б, в); 429 (а, г); 430 (г); 431 (б); 433 (г); 435 (б); 436 (в, г); 437 (б); 438 (б); 439 (г); 441 (в, г); 443 (г); 444 (а, б).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 34–35. Контрольная работа по теме «Обобщение понятия степени»

Цель: проверить знания учащихся, используя разноуровневые варианты.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее и варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит шесть задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{-5}}\cdot\sqrt[4]{16}$.

2. Упростите выражение $\dfrac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}$.

3. Решите уравнение $\sqrt{35-5x}+2x=9$.

4. Решите неравенство $(\sqrt{x}-3)(x^4-2)\ge 0$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases}2\sqrt{x}-\sqrt{y}=3\\ \sqrt{xy}=2\end{cases}$.

6. Сравните числа $\sqrt[7]{2^4}$ и $2^{\frac{2}{3}}$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}\cdot\sqrt[3]{-125}$.

2. Упростите выражение $\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$.

3. Решите уравнение $\sqrt{18x+1}-3x=1$.

4. Решите неравенство $(\sqrt{x}-2)(x^4-3)\le 0$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3\sqrt{x}+\sqrt{y}=7 \\ \sqrt{xy}=2 \end{cases}$.

6. Сравните числа $\sqrt[8]{5^7}$ и $5^{\frac{3}{4}}$.

Вариант 3

1. Найдите значение выражения $\sqrt[5]{1\frac{11}{16}\cdot 4{,}5-\frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{288}}}$.

2. Упростите выражение $3(a-1)+2\sqrt[5]{a^5}-5\sqrt[4]{a^4}$ (при $a\le 0$).

3. Решите уравнение $\sqrt{3x^2-4x+15}+\sqrt{3x^2-4x+8}=7$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{2x+y+4}+\sqrt{x+3y+11}=7 \\ 3x+4y=10 \end{cases}$.

5. Решите неравенство $\sqrt{7+3x}\ge 1-x$.

6. Упростите функцию $y=\sqrt{x^2-4x+4}+x$.

Вариант 4

1. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{3\frac{3}{8}\cdot 1\frac{1}{2}+\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}}}$.

2. Упростите выражение $2(a-3)+3\sqrt[3]{a^3}+4\sqrt[6]{a^6}$ (при $a\le 0$).

3. Решите уравнение $\sqrt{3-2x^2+3x}-\sqrt{2x^2-3x+2}=1$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+2y+4}+\sqrt{3x+4y+5}=7 \\ 4x+6y=16 \end{cases}$.

5. Решите неравенство $\sqrt{1-4x}\ge 2x+1$.

6. Упростите функцию $y=\sqrt{x^2-6x+9}-x$.

Вариант 5

1. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{9-\sqrt{54}}\cdot\sqrt[3]{9+\sqrt{54}}$.

2. Упростите выражение $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{ab}}{a-b}$.

3. Решите уравнение $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{2x-1}+\sqrt{y+3}=3 \\ 2xy-y+6x=7 \end{cases}$.

5. Постройте график функции $y=\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}}-\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}}$.

6. Докажите, что число $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ является натуральным числом.

Вариант 6

1. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}}\cdot\sqrt[4]{9+\sqrt{65}}$.

2. Упростите выражение $\frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\cdot\frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

3. Решите уравнение $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{2-x}+\sqrt{5-y}=3\\ 5x+2y-xy=6\end{cases}$.

5. Постройте график функции $y=\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$.

6. Докажите, что число $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ является натуральным числом.

Урок 36. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы; рассмотреть наиболее типичные ошибки; разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
–	1				
Ø	1				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными ошибками;

– – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу. Вариант 1, 2 – 8 учеников.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: 10.

2. *Ответ*: $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

3. *Ответ*: $x=2$.

4. *Ответ*: $x \in [0; \sqrt[4]{2}] \cup [9; \infty)$.

5. *Ответ*: (4; 1).

6. *Ответ*: второе число больше.

Вариант 2

1. *Ответ*: –10.

2. *Ответ*: $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

3. *Ответ*: $x=1$ и $x=\dfrac{4}{3}$.

4. *Ответ*: $x \in [\sqrt[4]{3}; 4]$.

5. *Ответ*: (4; 1), $\left(\dfrac{1}{9}; 36\right)$.

6. *Ответ*: первое число больше.

Вариант 3

1. *Ответ*: 1.

2. *Ответ*: $10a-3$.

3. *Ответ*: $\varnothing$.

4. *Ответ*: (2; 1), $\left(\dfrac{38}{5}; -\dfrac{16}{5}\right)$.

5. *Ответ*: $x \in [-1; \infty)$.

6. *Ответ*: $y=2$ при $x<2$ и $y=2x-2$ при $x \geq 2$.

Вариант 4

1. *Ответ*: 2.
2. *Ответ*: $a-6$.
3. *Ответ*: $x=1$ и $x=\frac{1}{2}$.
4. *Ответ*: (1; 2), (–20; 16).
5. *Ответ*: $x\in(-\infty;0]$.
6. *Ответ*: $y=3-2x$ при $x<3$ и $y=-3$ при $x\geq 3$.

Решения

Вариант 5

1. Используем свойства корней и формулу разности квадратов. Получаем: $\sqrt[3]{9-\sqrt{54}}\cdot\sqrt[3]{9+\sqrt{54}}=\sqrt[3]{(9-\sqrt{54})(9+\sqrt{54})}=\sqrt[3]{81-54}=\sqrt[3]{27}=3.$

Ответ: 3.

2. Приведем дроби к общему знаменателю и упростим:

$$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{ab}}{a-b}=$$

$$=\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+2\sqrt{b}(a-b)-\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}=$$

$$=\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+2a\sqrt{b}-2b\sqrt{b}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}=\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}+a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}=$$

$$=\frac{(a\sqrt{a}-b\sqrt{a})+(a\sqrt{b}-b\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}=\frac{\sqrt{a}(a-b)+\sqrt{b}(a-b)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}=$$

$$=\frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}=1.$$

Ответ: 1.

3. Для решения уравнения $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$ введем новые переменные $a=\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}$ и $b=\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}$. Запишем первое уравнение $a-b=1$. Возведем в куб новые переменные: $a^3=24+\sqrt{x}$ и $b^3=5+\sqrt{x}$. Вычтем эти равенства друг из друга и получим второе уравнение $a^3-b^3=19$ или $(a-b)(a^2+ab+b^2)=19$, откуда (с учетом первого уравнения) $a^2+ab+b^2=19$. Получаем систему уравнений $\begin{cases}a=b+1\\a^2+ab+b^2=19\end{cases}$. Подставим первое уравнение во второе:

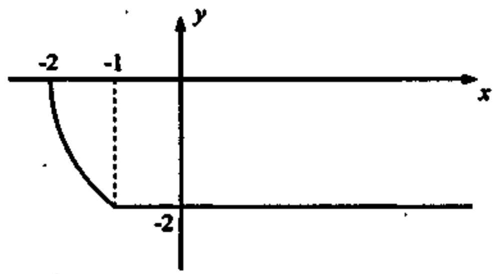
$(b+1)^2+(b+1)b+b^2=19$ или $b^2+b-6=0$. Корни этого уравнения $b_1=2$ и $b_2=-3$. Вернемся к старой переменной. Получаем уравнения: $2^3=5+\sqrt{x}$ (корень $x=9$) и $(-3)^3=5+\sqrt{x}$ (корней не имеет).

Ответ: $x=9$.

4. Для решения системы уравнений $\begin{cases}\sqrt{2x-1}+\sqrt{y+3}=3\\ 2xy-y+6x=7\end{cases}$ введем новые переменные $a=\sqrt{2x-1}$ и $b=\sqrt{y+3}$. Запишем первое уравнение $a+b=3$. Найдем квадраты новых переменных: $a^2=2x-1$ и $b^2=y+3$ и перемножим их: $a^2b^2=2xy-y+6x-3$, откуда $a^2\cdot b^2+3=2xy-y+6x$. Можно записать второе уравнение $a^2b^2+3=7$, откуда $ab=2$ (учтено, что $a,\ b\ge 0$). Получаем систему уравнений $\begin{cases}a+b=3\\ ab=2\end{cases}$, решения которой $a_1=1,\ b_1=2$ и $a_2=2,\ b_2=1$. Вернемся к старым переменным. Имеем две системы уравнений: $\begin{cases}1^2=2x-1\\ 2^2=y+3\end{cases}$ (решение $x=1,\ y=1$) и $\begin{cases}2^2=2x-1\\ 1^2=y+3\end{cases}$ (решение $x=\dfrac{5}{2},\ y=-2$).

Ответ: $(1;\ 1),\ \left(\dfrac{5}{2};-2\right)$.

5. Область определения функции $x\ge -2$. Введем переменную $z=\sqrt{x+2}$, тогда $x=z^2-2$. Функция имеет вид: $y=\sqrt{z^2+1-2z}-$ $-\sqrt{z^2+1+2z}$ или $y=|z-1|-(z+1)$. Раскроем знак модуля. При $z<1$ (т. е. $\sqrt{x+2}<1$ или $x<-1$) получаем: $y=-2z=-2\sqrt{x+2}$, при $z\ge 1$ (т. е. $x\ge -1$) имеем: $y=-2$. Построим этот график.



Ответ: см. график.

6. Напомним формулу куба суммы $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. Обозначим сумму $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ и возведем ее в куб: $x^3 = 20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}\cdot x$ или $x^3 = 40+6x$. Для нахождения x получили кубическое уравнение $x^3-6x-40=0$, которое имеет один действительный корень $x=4$ (натуральное число).

Ответ: доказано.

Вариант 6

1. Используем свойства корней и формулу разности квадратов. Получаем: $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}}\cdot\sqrt[4]{9+\sqrt{65}} = \sqrt[4]{(9-\sqrt{65})(9+\sqrt{65})} = \sqrt[4]{81-65} = \sqrt[4]{16} = 2$.

Ответ: 2.

2. Используем формулу суммы кубов, приведем дроби к общему знаменателю и упростим: $\dfrac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \dfrac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\cdot\dfrac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} =$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{a}(a-\sqrt{ab}+b)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} -$$

$$- \frac{2\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})-2\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = -\frac{2\sqrt{b}}{a-b} = \frac{2\sqrt{b}}{b-a}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{b}}{b-a}$.

3. Для решения уравнения $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4$ введем новые переменные $a = \sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}$ и $b = \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}$. Запишем первое уравнение $a+b=4$. Возведем в куб новые переменные: $a^3 = 9-\sqrt{x+1}$ и $b^3 = 7+\sqrt{x+1}$. Сложим эти равенства и получим второе уравнение $a^3+b^3=16$ или $(a+b)(a^2-ab+b^2)=16$, откуда (с учетом первого уравнения) $a^2-ab+b^2=4$. Получаем систему уравнений $\begin{cases} b=4-a \\ a^2-ab+b^2=4 \end{cases}$.

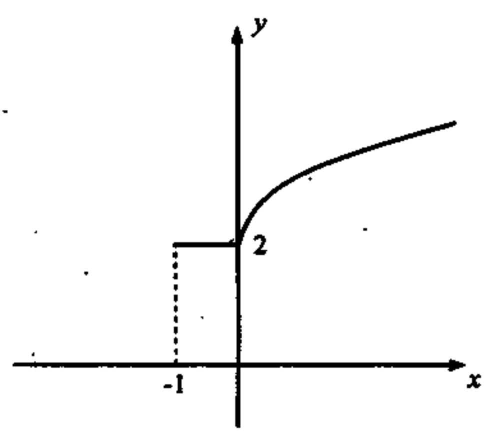
Подставим первое уравнение во второе: $a^2-a(4-a)+(4-a)^2=4$ или $a^2-4a+4=0$. Корень этого уравнения $a=2$. Вернемся к старой переменной. Получаем уравнения: $2^3 = 9-\sqrt{x+1}$ или $\sqrt{x+1}=1$. Корень этого уравнения $x=0$.

Ответ: $x=0$.

4. Для решения системы уравнений $\begin{cases} \sqrt{2-x}+\sqrt{5-y}=3 \\ 5x+2y-xy=6 \end{cases}$ введем новые переменные $a=\sqrt{2-x}$ и $b=\sqrt{5-y}$. Запишем первое уравнение $a+b=3$. Найдем квадраты новых переменных: $a^2=2-x$ и $b^2=5-y$ и перемножим их: $a^2b^2=10-5x-2y+xy$, откуда $5x+2y-xy=10-a^2b^2$. Можно записать второе уравнение $10-a^2b^2=6$, откуда $ab=2$ (учтено, что a, $b \ge 0$). Получаем систему уравнений $\begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases}$, решения которой $a_1=1$, $b_1=2$ и $a_2=2$, $b_2=1$. Вернемся к старым переменным. Имеем две системы уравнений: $\begin{cases} 1^2=2-x \\ 2^2=5-y \end{cases}$ (решение $x=1$, $y=1$) и $\begin{cases} 2^2=2-x \\ 1^2=5-y \end{cases}$ (решение $x=-2$, $y=4$).

Ответ: (1; 1), (−2; 4).

5. Область определения функции $x \ge -1$. Введем переменную $z=\sqrt{x+1}$, тогда $x=z^2-1$. Функция имеет вид: $y=\sqrt{z^2+1+2z}+$ $+\sqrt{z^2+1-2z}$ или $y=z+1+|z-1|$. Раскроем знак модуля. При $z<1$ (т. е. $\sqrt{x+1}<1$ или $x<0$) получаем $y=2$, при $z \ge 1$ (т. е. $x \ge 0$) имеем: $y=2z=2\sqrt{x+1}$. Построим этот график.



Ответ: см. график.

6. Напомним формулу куба суммы $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.. Обозначим сумму $x = \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ и возведем ее в куб: $x^3 = 9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{(9+\sqrt{80})(9-\sqrt{80})}x$ или $x^3 = 18+3x$. Для нахождения x получили кубическое уравнение $x^3 - 3x - 18 = 0$, которое имеет один действительный корень $x = 3$ (натуральное число).

Ответ: доказано.

§ 10. Показательная и логарифмическая функции

Уроки 37–38. Показательная функция

Цель: рассмотреть показательную функцию, ее свойства и график.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Изучение нового материала

Ранее было определено понятие степени числа с целым и рациональным показателями. Определим теперь степень числа с иррациональным показателем, и тогда степень числа будет определена для произвольного действительного показателя.

Пример 1

Обсудим, что понимается под числом $3^{\sqrt{2}}$. Число $r=\sqrt{2}$ является иррациональным числом и может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби:

$r=\sqrt{2}=1{,}414213...=a_1,a_2a_3a_4...a_n...,$

где a_1 и a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ... – цифры целой и дробной части числа, соответственно.

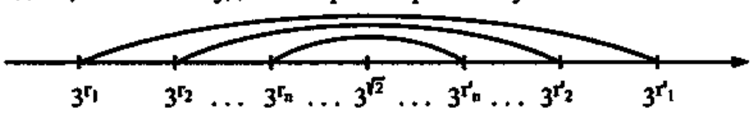
Очевидно, что $r_n<r<r_n'$, где $r_n=a_1,a_2a_3a_4...a_n$ – рациональное приближение числа r с недостатком, где $r'_n=a_1,a_2a_3a_4...(a_n+1)$ – рациональное приближение числа r с избытком. Например, для числа $r=\sqrt{2}$ эти приближения равны (соответственно, для одной, двух, трех и т.д. значащих цифр):

r_n: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; ...

r_n': 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422; ...

Для n значащих цифр разница между приближением r'_n с избытком и приближением r_n с недостатком числа r составляет величину $r_n'-r_n=10^{-(n+1)}$ и уменьшается с увеличением числа значащих цифр. Это позволяет оценить иррациональное число r **сколь угодно точно рациональными числами** r_n, r'_n.

Так как понятие степени с рациональным показателем было уже введено, то число 3^r удовлетворяет неравенству: $3^{r_n}<3^r<3^{r_n'}$.



С увеличением n число 3^r может быть оценено сколь угодно точно числами 3^{r_n} и $3^{r'_n}$. При больших n можно считать, что $3^r \approx 3^{r_n} \approx 3^{r'_n}$, что и считается **степенью числа с иррациональным показателем.**

Дадим точное определение степени с иррациональным показателем (заметим, что в школьном курсе это определение не приводится, но при учебе в вузе требуется).

Степенью a^r положительного числа a ($a > 0$) с иррациональным показателем r называется предел числовой последовательности степеней этого числа с рациональными показателями r_n или r'_n, являющимися n-значными приближениями числа r по недостатку или избытку:

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n}.$$

После введенного определения степень числа с произвольным действительным показателем определена.

Пример 2

а) $(\sqrt{2})^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = (-5)^0 = (0{,}0001)^0 = 1;$

б) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8};$

в) $(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = \frac{1}{(-4)(-4)(-4)} = -\frac{1}{64};$

г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3/4} = \sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \sqrt[4]{\frac{8}{27}};$

д) $\sqrt[5]{-243} = -3;$

е) $0^{\frac{5}{7}} = 0^{\sqrt{3}} = 0;$ $0^0, 0^{-\frac{5}{3}}, 0^{-\sqrt{2}}$ – не определены;

ж) $1^{-\frac{7}{3}} = 1^0 = 1^{-\sqrt{3}} = 1^{2+\sqrt{2}} = 1;$

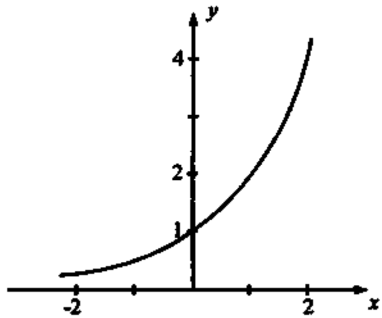
з) $5^{-\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} 5^{-r'_n} = \lim_{n\to\infty} 5^{-r_n}$, где $r_n = \{1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \ldots\}$,

$r'_n = \{2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ \ldots\}$.

Теперь можно ввести понятие показательной функции. **Функция, заданная формулой $y = a^x$ (где $a > 0$, $a \neq 1$, x – любое действительное число), называется показательной функцией с основанием a.**

Составив таблицу значений показательной функции для различных значений аргумента, легко построить график такой функции. Приведем подобную таблицу и график функции $y = 2^x$.

x	−2	−1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



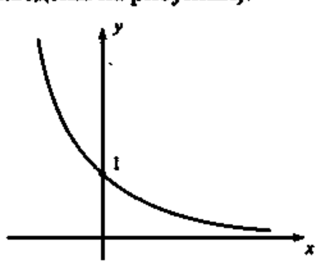
Перечислим основные **свойства показательной функции.**

1) **Область определения** – множество действительных чисел R.

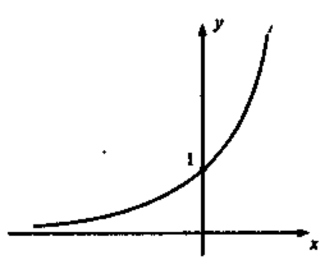
2) **Область значений** – множество всех положительных действительных чисел R_+.

3) **Монотонность:** при $0 < a < 1$ функция убывающая, при $a > 1$ функция возрастающая.

4) При всех значениях a **график** показательной функции **пересекает ось ординат в точке** $y = 1$ (графики показательной функции приведены на рисунках).



для $0 < a < 1$



для $a > 1$

5) **Выполняются свойства степеней с рациональным показателем**, т. е. для любых действительных значений x и y **справедливы равенства:**

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y};\ a^x : a^y = a^{x-y};\ (a^x)^y = a^{xy};\ (ab)^x = a^x \cdot b^x;\ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Пример 3

Сравним числа $2^{-3\sqrt{5}}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{5,6}$.

Второе число запишем в виде степени с основанием 2 и получим: $\left(\frac{1}{2}\right)^{5,6}=2^{-5,6}$. Сначала сравним показатели степеней. Так как $\sqrt{5}\approx 2,2$, то $-3\sqrt{5}<-5,6$. Функция $y = 2^x$ является возрастающей. Поэтому бо́льшему значению аргумента соответствует бо́льшее значение функции. Тогда имеем: $2^{-3\sqrt{5}}<2^{-5,6}$ или $2^{-3\sqrt{5}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{5,6}$, т. е. второе число больше.

Пример 4

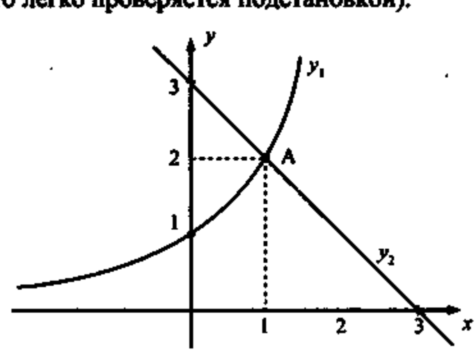
Сравним числа x и y, если верно неравенство $\left(\sqrt{2\frac{7}{9}}\right)^{-x}>(0,6)^y$.

Используя свойство степеней, запишем первое число в виде $\left(\sqrt{2\frac{7}{9}}\right)^{-x}=\left(\sqrt{\frac{25}{9}}\right)^{-x}=\left(\frac{5}{3}\right)^{-x}=\left(\frac{3}{5}\right)^{x}=(0,6)^x$. Тогда данное неравенство имеет вид $(0,6)^x > (0,6)^y$. Так как функция $(0,6)^x$ убывающая, то показатели степеней связаны неравенством противоположного знака, т. е. $x<y$.

Пример 5

Графически решим уравнение $2^x = 3 - x$.

Построим графики показательной функции $y_1 = 2^x$ и линейной функции $y_2 = 3 - x$. Видно, что графики этих функций пересекаются в одной точке A, абсцисса которой $x = 1$ является решением данного уравнения (что легко проверяется подстановкой).

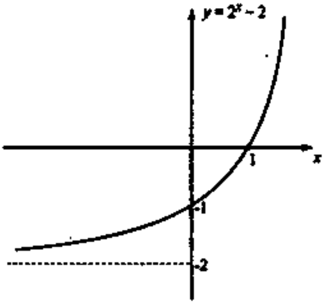


Пример 6

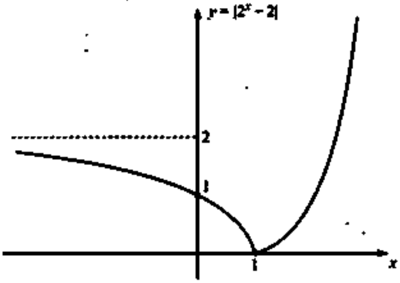
Построим график функции $y=\left|2^x-2\right|$.

Сначала построим график функции $y = 2^x - 2$. Он получается смещением графика функции $y = 2^x$ на 2 единицы вниз. Затем построим график функции $y=\left|2^x-2\right|$.

Для этого сохраняем часть предыдущего графика, для которой $y \geq 0$. Ту часть графика, для которой $y < 0$, отражаем вверх относительно оси абсцисс.



$y=2^x-2$

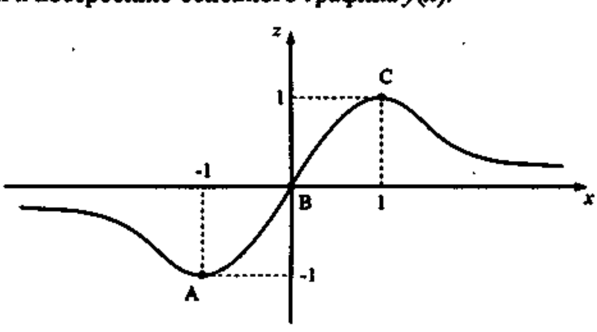


$y=\left|2^x-2\right|$

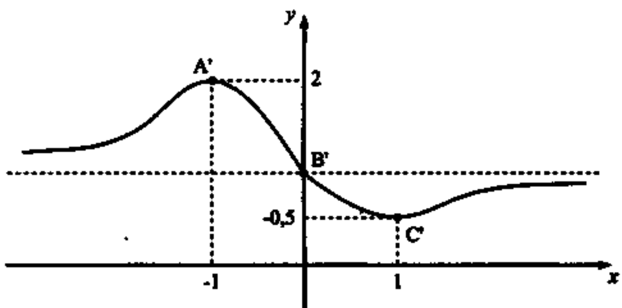
Пример 7

Построим график функции $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2x}{1+x^2}}$.

Данная функция является сложной: $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^z$, где аргумент $z=\dfrac{2x}{1+x^2}$ является функцией переменной x. Поэтому сначала построим график функции $z(x)$, например используя производную. Учтем, что функция нечетная и ее график проходит через начало координат. Теперь перейдем к построению основного графика $y(x)$.



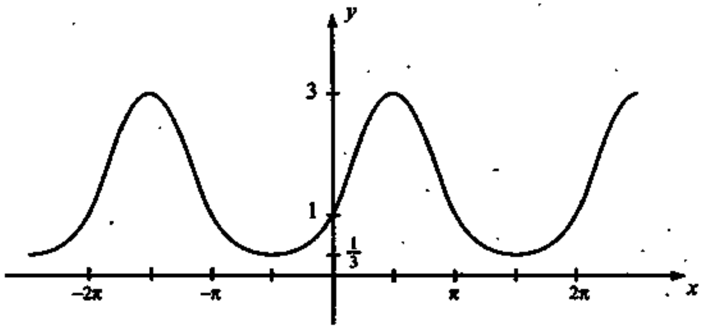
Как видно из графика, при $x \to \infty$ $z \to 0$ и $y \to \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$. Поэтому график функции $y(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$. Рассмотрим также точку минимума A (для которой $x = -1$ и $z = -1$), тогда $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$. Строим точку A' с координатами $x = -1$ и $y = 2$. Учтем точку B с координатами $x = 0$ и $z = 0$, тогда $y = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$. Строим точку B' с координатами $x = 0$ и $y = 1$. И наконец, рассмотрим точку C (для которой $x = 1$ и $z = 1$), тогда $y = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0{,}5$. Поэтому строим точку C' с координатами $x = 1$ и $y = 0{,}5$. После изложенного строим окончательный график функции $y(x)$.



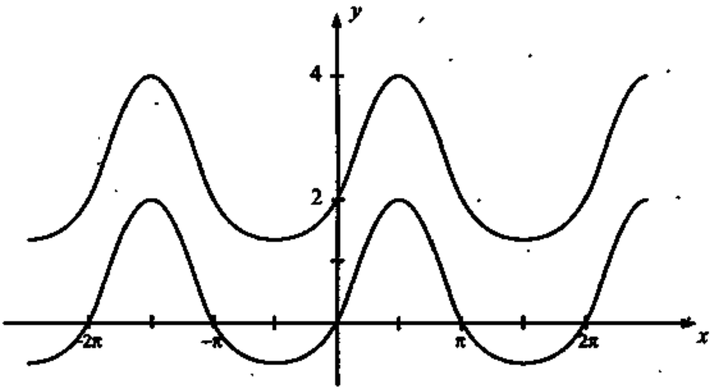
Пример 8

Построим график уравнения $\left|y - 3^{\sin x}\right| = 1$.

По определению модуля получаем, что данное равенство равносильно соотношению $y - 3^{\sin x} = \pm 1$ или $y = 3^{\sin x} \pm 1$. Аналогично предыдущему примеру сначала построим график функции $y = 3^{\sin x}$, рассмотрев сначала характерные точки синуса в промежутке $x \in [-\pi; \pi]$. В точках $x = 0, \pm\pi$ величина $\sin x = 0$ и $y = 1$. В точке $x = -\frac{\pi}{2}$ величина $\sin x = -1$ и $y = 3^{-1} = \frac{1}{3}$. Наконец, в точке $x = \frac{\pi}{2}$ величина $\sin x = 1$ и $y = 3^1 = 3$. Отметив эти точки, строим график функции $y = 3^{\sin x}$.



Так как функция синус периодическая и период $T = 2\pi$, то и функция $y = 3^{\sin x}$ периодична с таким же периодом. График уравнения $y = 3^{\sin x} \pm 1$ получается из построенного смещением на 1 единицу вверх и 1 единицу вниз и представляет собой две линии.



III. Задание на уроках

№ 446 (а, б); 447 (в, г); 448 (б, в); 449 (г); 450 (в, г); 453 (б); 454 (в); 455 (а, г); 457 (а); 458 (в, г).

IV. Контрольные вопросы

1. Поясните понятие степени с иррациональным показателем.
2. Дайте определение показательной функции.
3. Приведите графики показательной функции.
4. Перечислите основные свойства показательной функции (фронтальный опрос).

V. Задание на дом

№ 446 (в, г); 447 (а, б); 448 (а, г); 450 (б); 453 (г); 454 (г); 455 (б, в); 457 (б); 458 (а, б).

VI. Творческие задания

Постройте графики функций, уравнений или неравенств:

1) $y = 2^{x-2}$; 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$; 3) $y = 2^x + 1$;

4) $y = 3^{-x} - 2$; 5) $y = 2^{|x|-1}$; 6) $y = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2\right|$;

7) $|y| = 3^x - 3$; 8) $|y+2| \le 2^{\cos x}$; 9) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\lg x}$;

10) $|y| \ge 2^{\cos x}$; 11) $|y + 2^{\cos x}| < 1$; 12) $|y - 3^{\sin x}| \ge 1$.

Указание. Используйте способы преобразования графиков функций и определение модуля.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 39–43. Решение показательных уравнений и неравенств

Цели: систематизировать виды показательных выражений и рассмотреть способы решений уравнений, систем уравнений, неравенств.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $\frac{(5^{\sqrt{2}})^2 \cdot 5^{1+\sqrt{2}}}{125^{\sqrt{2}}}$.

Ответы: а) 1; б) 25; в) 5; г) $\frac{1}{5}$.

2. Упростите выражение $\sqrt[3]{a\sqrt{a^2\sqrt{a}}}$.

Ответы: а) $a^{\frac{3}{4}}$; б) $a^{\frac{1}{3}}$; в) $a^{\frac{1}{4}}$; г) $a^{\frac{2}{3}}$.

3. Найдите область значений функции $y = 2 \cdot 3^{\cos x} - 1$.

Ответы: а) $[-1; \infty)$; б) $\left[-\frac{1}{3}; 5\right]$; в) $[2; 5]$; г) $(0; \infty)$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $\frac{(2^{\sqrt{3}})^3 \cdot 2^{2-\sqrt{3}}}{4^{\sqrt{3}}}$.

Ответы: а) 1; б) 4; в) 2; г) $\frac{1}{4}$.

2. Упростите выражение $\sqrt{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}$.

Ответы: а) $a^{\frac{3}{8}}$; б) $a^{\frac{1}{8}}$; в) $a^{\frac{15}{8}}$; г) $a^{\frac{3}{16}}$.

3. Найдите область значений функции $y = 3 \cdot 2^{\sin x} + 1$.

Ответы: а) $\left[\frac{5}{2}; 7\right]$; б) $(0; \infty)$; в) $[1; 7]$; г) $\left[\frac{5}{2}; \infty\right)$.

III. Изучение нового материала

Показательные уравнения

Показательным уравнением называется уравнение, в котором **неизвестное x входит только в показатели степени** при некоторых постоянных основаниях.

Пример 1

а) Уравнение $3^{x^2-2x} \cdot 5^{2-x} + 2^{\sqrt{1-x}} = 7^{x^2}$ – показательное.

б) Уравнение $3^{x^2-2x} \cdot 5^{2-x} + \sqrt{1-x} = 7^{x^2}$ не является показательным.

Рассмотрим систематику показательных выражений и способы решения уравнений. Так как показательная функция a^x монотонна и ее область значений $(0; \infty)$, то простейшее показательное уравнение $a^x = b$ имеет **единственный корень** при $b > 0$. Именно **к виду $a^x = b$** надо **сводить** более сложные уравнения.

1. Простейшие уравнения

Пример 2

Решим уравнение $4^{x^2+3x} = \frac{1}{16}$.

Правую часть уравнения представим в виде степени числа 4 и получим: $4^{x^2+3x} = 4^{-2}$. Так как равны степени числа 4, то равны и показатели степеней. Имеем квадратное уравнение $x^2 + 3x = -2$ или

$x^2+3x+2=0$. Корни этого уравнения $x_1=-1$ и $x_2=-2$ являются и решениями данного уравнения.

2. Уравнения, решаемые их преобразованиями

Пример 3

Решим уравнение $5^{x+3}-3\cdot 5^{x+1}-10\cdot 5^x=4$.

Так как все слагаемые в левой части уравнения имеют вид 5^{x+a} (где a – некоторое число), то вынесем общий множитель 5^x за скобки. Получаем: $5^x(5^3-3\cdot 5-10)$ или $5^x\cdot 100=4$. Разделим обе части уравнения на число 100. Имеем: $5^x=\frac{1}{25}$ или $5^x=5^{-2}$. Так как равны степени числа 5, то равны и показатели степеней. Тогда находим единственный корень данного уравнения $x=-2$.

Вынесение общего множителя за скобки можно использовать и при решении уравнений, содержащих степени с двумя разными основаниями.

Пример 4

Решим уравнение $9^x-2^{x+\frac{7}{2}}=2^{x+\frac{1}{2}}-3^{2x-1}$.

В данное уравнение входят числа 2 и 3 в различных степенях. Поэтому сгруппируем члены уравнения, содержащие степени числа 3, в левой части, а члены, содержащие степени числа 2, – в правой. Получаем: $9^x+3^{2x-1}=2^{x+\frac{1}{2}}+2^{x+\frac{7}{2}}$. В левой части вынесем за скобки общий множитель 3^{2x-1}, в правой – общий множитель $2^{x+\frac{1}{2}}$. Имеем: $3^{2x-1}(3+1)=2^{x+\frac{1}{2}}(1+2^3)$, или $3^{2x-1}\cdot 4=2^{x+\frac{1}{2}}\cdot 9$, или $3^{2x-1}\cdot 2^2=2^{x+\frac{1}{2}}\cdot 3^2$. Разделим обе части этого уравнения на правую часть (очевидно, она не равна нулю): $\frac{3^{2x-1}\cdot 2^2}{2^{x+\frac{1}{2}}\cdot 3^2}=1$, или $\frac{9^{x-\frac{3}{2}}}{2^{x-\frac{3}{2}}}=1$, или $\left(\frac{9}{2}\right)^{x-\frac{3}{2}}=\left(\frac{9}{2}\right)^0$. Так как равны степени числа $\frac{9}{2}$, то равны и показатели степеней: $x-\frac{3}{2}=0$, откуда $x=\frac{3}{2}$.

3. Уравнения, решаемые разложением на множители

Одним из наиболее распространенных преобразований является **разложение уравнения на множители.** В частности, оно используется **при различных основаниях** степеней.

Пример 5

Решим уравнение $2^{x+1}\cdot 3^{2x-1}\cdot 5^x=5400$.

Число 5400 разложим на простые множители: $5400 = 2^3\cdot 3^3\cdot 5^2$. Тогда уравнение имеет вид $2^{x+1}\cdot 3^{2x-1}\cdot 5^x=2^3\cdot 3^3\cdot 5^2$. Разделим обе части уравнения на его правую часть. Получаем: $\dfrac{2^{x+1}\cdot 3^{2x-1}\cdot 5^x}{2^3\cdot 3^3\cdot 5^2}=1$, или $2^{x-2}\cdot 3^{2x-4}\cdot 5^{x-2}=1$, или $(2\cdot 3^2\cdot 5)^{x-2}=1$, или $90^{x-2}=90^0$, тогда $x-2=0$ и $x=2$.

Разложение на множители также используется и в уравнениях, содержащих помимо показательных функций **другие функции**.

Пример 6

Решим уравнение $2\cdot 5^x\sin x+1=2\sin x+5^x$.

Перенесем все члены уравнения в левую часть, сгруппируем их и вынесем общие множители за скобки. Имеем: $2\cdot 5^x\sin x+1-2\sin x-5^x=0$, или $(2\cdot 5^x\sin x-2\sin x)+(1-5^x)=0$, или $2\sin x(5^x-1)-(5^x-1)=0$, или $(5^x-1)(2\sin x-1)=0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем два уравнения:

а) $5^x-1=0$ или $5^x=5^0$, откуда $x=0$;

б) $2\sin x-1=0$ или $\sin x=\dfrac{1}{2}$, тогда $x=(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{2}+\pi n=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, где $n\in Z$.

4. Уравнения, решаемые с помощью замены неизвестной

Как и в уравнениях других видов, в случае показательных уравнений часто используется замена неизвестной.

Пример 7

Решим уравнение $3^{x+1}-8=3^{1-x}$.

Запишем данное уравнение в виде $3\cdot 3^x-8=\dfrac{3}{3^x}$ и введем новую неизвестную $t=3^x>0$. Получаем уравнение $3t-8=\dfrac{3}{t}$ или $3t^2-8t-3=0$. Корни этого квадратного уравнения $t_1=3$ и $t_2=-\dfrac{1}{3}$ (не подходит, так как $t>0$). Получаем простейшее показательное уравнение $3^x=3$, решение которого $x=1$.

Пример 8

Решим уравнение $2^{\sin^2 x}+4\cdot 2^{\cos^2 x}=6$.

Учтем основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, тогда $2^{\cos^2 x} = 2^{1-\sin^2 x} = \frac{2}{2^{\sin^2 x}}$. Уравнение теперь имеет вид: $2^{\sin^2 x} + 4 \cdot \frac{2}{2^{\sin^2 x}} = 6$. Введем новую неизвестную $t = 2^{\sin^2 x}$ и получим уравнение $t + \frac{8}{t} = 6$ или $t^2 - 6t + 8 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $t_1 = 2$ и $t_2 = 4$. Вернемся к старой неизвестной x и получим два уравнения.

а) $2^{\sin^2 x} = 2$, тогда $\sin^2 x = 1$ или $\sin x = \pm 1$. Решения этих уравнений $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$.

б) $2^{\sin^2 x} = 4$, откуда $\sin^2 x = 2$. Это уравнение решений не имеет, так как функция синус ограничена: $\sin x \le 1$ и $\sin^2 x \le 1$ при всех x.

В ряде случаев для решения показательного уравнения приходится вводить две новые переменные и сводить уравнение к однородному.

Пример 9

Решим уравнение $3^{2(x+6)} + 3^{2x^2} - 2 \cdot 3^{x^2+x+6} = 0$.

Запишем данное уравнение в виде $(3^{x+6})^2 + (3^{x^2})^2 - 2 \cdot 3^{x+6} \cdot 3^{x^2} = 0$ и введем две новые неизвестные $a = 3^{x+6}$ и $b = 3^{x^2}$. Получаем однородное уравнение $a^2 + b^2 - 2ab = 0$ или $(a-b)^2 = 0$, откуда $a - b = 0$ или $a = b$. Вернемся к старой неизвестной x. получаем уравнение $3^{x+6} = 3^{x^2}$. Так как равны степени числа 3, то равны и показатели степеней. Имеем квадратное уравнение: $x + 6 = x^2$ или $0 = x^2 - x - 6$, корни которого $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$.

5. Уравнения, решаемые с помощью их специфики

Название этого типа уравнений достаточно условно: при решении любого уравнения в той или иной степени учитывается его специфичность. Поэтому рассмотрим несколько примеров.

Пример 10

Решим уравнение $7^x + 24^x = 25^x$.

Легко угадать корень уравнения $x = 2$. Действительно, при подстановке получаем верное равенство: $7^2 + 24^2 = 25^2$. Покажем, что других решений уравнение не имеет. Разделим все члены уравнения на его правую часть и получим $\left(\frac{7}{25}\right)^x + \left(\frac{24}{25}\right)^x = 2$. Очевидно, что функции $\left(\frac{7}{25}\right)^x$ и $\left(\frac{24}{25}\right)^x$ убывающие, так как их основания меньше 1. Сумма этих функций также является функцией убывающей. Поэтому по теореме о корне данное уравнение имеет единственное решение.

Пример 11

Решим уравнение $(x-2)^{x^2+2x}=(x-2)^{11x-20}$.

Данное уравнение не является показательным, так как неизвестная входит и в основание, и в показатель степени.

При решении уравнений вида $[f(x)]^{g(x)}=[f(x)]^{h(x)}$ необходимо помнить, что число x_0 будет корнем этого уравнения, если имеет место **один из следующих четырех случаев**:

а) $f(x_0)=-1$, а числа $g(x_0)$ и $h(x_0)$ – целые числа одинаковой четности;

б) $f(x_0)=0$, а числа $g(x_0)$ и $h(x_0)$ – положительные;

в) $f(x_0)=1$, а функции $g(x)$ и $h(x)$ определены при $x=x_0$;

г) $g(x_0)=h(x_0)$, а функции $[f(x)]^{g(x)}$ и $[f(x)]^{h(x)}$ определены при $x=x_0$.

Рассмотрим все перечисленные выше случаи:

а) $x-2=-1$, то есть $x=1$. При этом $x^2+2x=1^2+2\cdot1=3$ и $11x-20=11\cdot1-20=-9$, то есть числа 3 и -9 – целые числа одинаковой четности и числа $(-1)^3$ и $(-1)^{-9}$ существуют и равны -1.

б) $x-2=0$, то есть $x=2$. При этом $x^2+2x=2^2+2\cdot2=8$ и $11x-20=11\cdot2-20=2$, то есть числа 8 и 2 – положительные и числа 0^8 и 0^2 существуют и равны 0.

в) $x-2=1$, то есть $x=3$. При этом $x^2+2x=3^2+2\cdot3=15$ и $11x-20=11\cdot3-20=13$, то есть функции x^2+2x и $11x-20$ при $x=3$ определены. Заметим, что числа 1^{15} и 1^{13} равны друг другу и равны 1.

г) $x^2+2x=11x-20$ или $x^2-9x+20=0$, то есть $x_1=4$ и $x_2=5$.

При $x=4$ функции, входящие в уравнение, определены: $(4-2)^{4^2+2\cdot4}$ и $(4-2)^{11\cdot4-20}$ и их значения равны друг другу и равны 2^{24}.

При $x=5$ функции также определены: $(5-2)^{5^2+2\cdot5}$ и $(5-2)^{11\cdot5-20}$ и их значения раны 3^{35}.

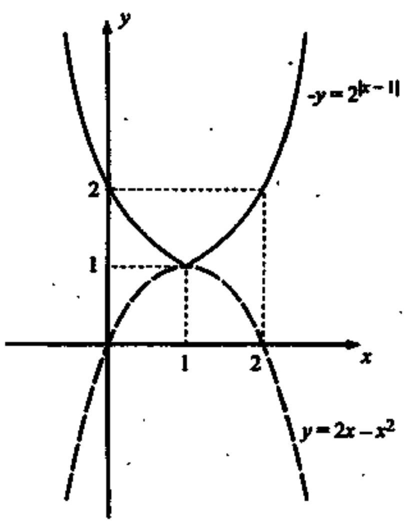
Итак, уравнение имеет пять корней: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$.

Обратимся теперь к задачам, для решения которых необходимо найти **области изменения функций**, входящих в уравнение.

Пример 12

Решим уравнение $2^{|x-1|}=2x-x^2$.

Найдем области изменения функций $y=2^{|x-1|}$ и $y=2x-x^2$. Первая функция – показательная с основанием $2>1$ и так как $|x-1|\geq 0$, то $y\geq 2^0=1$. Вторая функция – парабола, направленная ветвями вниз, проходящая через точки $x=0$ и $x=2$. Максимум этой параболы достигается при $x=1$ и равен $y=2\cdot 1-1^2=1$. При остальных x $y\leq 1$. Таким образом, значения этих двух функций совпадают только при $x=1$ и равны 1. Итак, $x=1$ – корень уравнения. Полезно решение в простейших случаях, например в этом, иллюстрировать графическим решением.



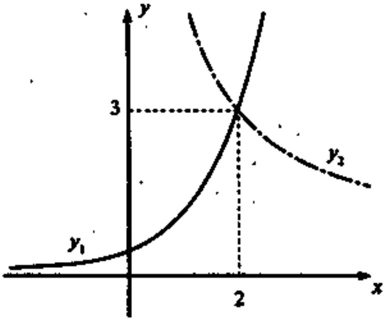
6. Уравнения, решаемые графически

При решении уравнений, содержащих показательные и другие функции, достаточно часто используется **графический способ.**

Пример 13

Решим уравнение $3^{x-1}=\dfrac{6}{x}$.

Построим график функций $y_1=3^{x-1}$ и $y_2=\dfrac{6}{x}$. Видно, что графики этих функций пересекаются в единственной точке A, абсцисса которой $x=2$ является решением данного уравнения.



Показательные неравенства

При решении простейших показательных неравенств $a^{f(x)} \vee b$ **используется монотонность показательной функции: при** $0 < a < 1$ **функция убывающая, при** $a > 1$ **– возрастающая.** Поэтому при рассмотрении **показателей степеней в первом случае знак неравенства меняется на противоположный, во втором – сохраняется.**

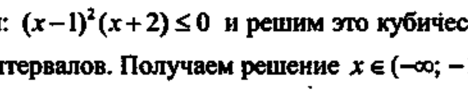
Пример 14

Решим неравенство $\sqrt[10]{2^{x^2-14,5x}} < \frac{1}{8}$.

Запишем неравенство в виде $2^{\frac{x^2-14,5x}{10}} < 2^{-3}$. Так как основание 2 показательной функции больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака: $\frac{x^2-14,5x}{10} < -3$ или $x^2-14,5x+30<0$. Решение этого квадратного неравенства $x \in (2,5;\ 12)$.

Пример 15

Решим неравенство $(0,8)^{x^3-3x+4} \geq (0,8)^2$ Так как основание 0,8 показательной функции меньше 1 (показательная функция убывающая), то показатели степеней связаны неравенством противоположного знака: $x^3-3x+4 \leq 2$ или $x^3-3x+2 \leq 0$. Разложим левую часть на множители: $(x-1)^2(x+2) \leq 0$ и решим это кубическое неравенство методом интервалов. Получаем решение $x \in (-\infty;\ -2] \cup \{1\}$.



При решении более сложных неравенств используются **те же приемы,** что и **при решении аналогичных уравнений.**

Пример 16

Решим неравенство $\dfrac{1}{3^x+5}\le\dfrac{1}{3^{x+1}-1}$.

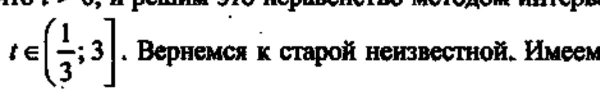
Введем новую неизвестную $y=3^x>0$ и получим рациональное неравенство: $\dfrac{1}{t+5}\le\dfrac{1}{3t-1}$, или $\dfrac{1}{t+5}-\dfrac{1}{3t-1}\le 0$, или $\dfrac{2t-6}{(t+5)(3t-1)}\le 0$.

Учтем, что $t>0$, и решим это неравенство методом интервалов. Получаем: $t\in\left(\dfrac{1}{3};3\right]$. Вернемся к старой неизвестной. Имеем двойное неравенство $3^{-1}<3^x\le 3$. Так как основание 3 степеней больше единицы, то показатели степеней связаны неравенствами того же знака $-1<x\le 1$ или $x\in(-1;1]$.

Пример 17

Решим неравенство $(x-2)^{x^2-6x+8}\ge 1$.

ОДЗ неравенства $x\in(2;\infty)$. Запишем неравенство в виде $(x-2)^{x^2-6x+8}-1\ge 0$ и найдем корни соответствующего уравнения: $x_1=3$ и $x_2=4$. Решая методом интервалов это неравенство с учетом ОДЗ, получаем: $x\in(2;3]\cup[4;\infty)$.



Системы показательных уравнений

При решении систем показательных уравнений применяются те же способы, что и для решения показательных уравнений. Достаточно часто системы непосредственно сводятся к системам алгебраических уравнений.

Пример 18

Решим систему уравнений $\begin{cases}2^{3x^2+xy+y}=0{,}5\\3^{2x-y}=81\end{cases}$.

Запишем данную систему уравнений в виде $\begin{cases}2^{3x^2+xy+y}=2^{-1}\\3^{2x-y}=3^4\end{cases}$. Получаем систему алгебраических уравнений $\begin{cases}3x^2+xy+y=-1\\2x-y=4\end{cases}$. Из второго уравнения выразим $y=2x-4$ и подставим в первое. Имеем: $3x^2+x(2x-4)+2x-4=-1$ или $5x^2-2x-3=0$. Корни этого уравнения $x_1=1$ и $x_2=-\frac{3}{5}$. Найдем соответствующие значения $y_1=-2$ и $y_2=-5\frac{1}{5}$. Итак, система уравнений имеет два решения: (1; −2) и $\left(-\frac{3}{5};-5\frac{1}{5}\right)$.

Разумеется, при решении систем уравнений широко используется **замена неизвестных.**

Пример 19

Решим систему уравнений $\begin{cases}3^x+2\cdot 3^y=15\\ 2^{2x-y}=8\end{cases}$.

Из второго уравнения найдем $2x-y=3$, откуда $y=2x-3$. Подставим это соотношение в первое уравнение и получим: $3^x+2\cdot 3^{2x-3}=15$ или $3^x+\frac{2}{27}\cdot(3^x)^2=15$. Введем новую неизвестную $t=3^x>0$. Имеем квадратное уравнение $t+\frac{2}{27}t^2=15$ или $2t^2+27t-405=0$, корни которого $t_1=9$ и $t_2=-22{,}5$ (не подходит, так как $t>0$). Возвращаясь к старым неизвестным, получаем уравнение $3^x=9$, $x=2$ и $y=1$.

Пример 20

Решим систему уравнений $\begin{cases}2\cdot 3^{x-1}+7\cdot 5^{y+1}=37\\ 9^x+5^y=10\end{cases}$.

Систему уравнений запишем в виде $\begin{cases}\frac{2}{3}\cdot 3^x+35\cdot 5^y=37\\ (3^x)^2+5^y=10\end{cases}$ и введем новые переменные $a=3^x$ и $b=5^y$ (при этом a, $b>0$). Получаем систему алгебраических уравнений $\begin{cases}\frac{2}{3}a+35b=37\\ a^2+b=10\end{cases}$ или $\begin{cases}2a+105b=111\\ a^2+b=10\end{cases}$. Из второго уравнения выразим $b=10-a^2$ и подставим в первое. Имеем: $2a+105(10-a^2)=111$ или

$0=105a^2-2a-939$. Корни этого квадратного уравнения $a_1=3$ и $a_2=-\dfrac{313}{105}$ (не подходит, так как $a>0$). Найдем $b=10-3^2=1$. Вернемся к старым неизвестным. Получаем систему простейших показательных уравнений $\begin{cases}3^x=3\\5^y=1\end{cases}$, откуда $x=1$ и $y=0$.

IV. Задание на уроках

№ 461 (а, б); 462 (б); 463 (г); 464 (в); 465 (б); 466 (а, г); 467 (а, б); 468 (б); 469 (в); 470 (б); 471 (в); 472 (а, г); 473 (б); 474 (г); 475 (а, в).

V. Задание на дом

№ 461 (г); 462 (г); 463 (б); 464 (г); 465 (г); 466 (б, в); 467 (в, г); 468 (в); 469 (б); 470 (в); 471 (б); 472 (б, в); 473 (а); 474 (б); 475 (б, г).

VI. Творческие задания

1. Решите показательные уравнения:

а) $2^{x+4}-3\cdot5^x=5^{x+1}-4\cdot2^x$;
б) $5^{3x+1}-4\cdot100^x=5\cdot80^x-4^{3x+1}$;

в) $x^2\cdot7^{\sqrt{2x+5}-2}+25\cdot7^{x-1}=x^2\cdot7^{x-1}+\dfrac{25}{49}\cdot7^{\sqrt{2x+5}}$;

г) $x^2\cdot3^{\sqrt{2x-1}-1}+3^x=3^{\sqrt{2x-1}+1}+x^2\cdot3^{x-2}$;

д) $(3-2\sqrt{2})^x+(3+2\sqrt{2})^x=34$;
е) $5(2+\sqrt{3})^x-(2-\sqrt{3})^x=4$;

ж) $3\cdot16^x+2\cdot81^x=5\cdot36^x$;
з) $9\cdot4^x+5\cdot6^x=4\cdot9^x$;

и) $2^{2x^2}+2^{x^2+2x+2}=2^{5+4x}$;
к) $3\cdot5^{2x^2+6x-9}=4\cdot15^{x^2+3x-5}+3^{2x^2+6x-9}$;

л) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+\left(\dfrac{1}{5}\right)^x=7$;
м) $\sqrt{x+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$;

н) $(x-3)^{x^2-4x-5}=1$;
о) $x^{x^2-5x-6}=1$;

п) $(\operatorname{tg}x)^{\sin x}=\sqrt{\operatorname{tg}x}$;
р) $(\sin 2x)^{\cos x}=\dfrac{1}{\sqrt{\sin 2x}}$;

с) $x\cdot3^{\sin x}+2\sqrt{3}=\sqrt{3}x+2\cdot3^{\sin x}$;
т) $9^{\cos^2x}+3^{\cos 2x}=12\cdot9^{\sin x\cos x}$.

Ответы: а) 1; б) $\{0;-1\}$; в) $\{2;5\}$; г) $\{3;2+\sqrt{2}\}$; д) $\{-2;2\}$; е) 0; ж) $\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\}$; з) 2; и) $\{1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\}$; к) $\{-4;1\}$; л) -1; м) 0; н) $\{4;5\}$;

о) $\{1; 6\}$; п) $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi k; n, k\in Z\right\}$; р) $\left\{-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi k; n, k\in Z\right\}$;

с) $\left\{2; (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z\right\}$; т) $\left\{\pi n; -\frac{\pi}{4}+\pi k; n, k\in Z\right\}$.

2. Решите показательные неравенства:

а) $9^x+25^x\le 2\cdot 15^x$; б) $9\cdot 4^{-\frac{1}{x}}+5\cdot 6^{-\frac{1}{x}}<4\cdot 9^{-\frac{1}{x}}$;

в) $5^{|4x-6|}\ge 25^{3x-4}$; г) $(0,6)^{|2x-5|}\ge (0,6)^{3x-1}$;

д) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}}\ge 125$; е) $(0,2)^{\frac{2x-3}{x-2}}>5$;

ж) $(x^2-7x+12)(5^x-25)\ge 0$; з) $(x^2-4x+3)(2^x-8)\le 0$;

и) $\sqrt{4^x-2^{x+3}+8}\ge\sqrt{3-2^{x+1}}$; к) $\sqrt{2^x+3}-\sqrt{2^{x+1}-1}\le\sqrt{3\cdot 2^x-2}$;

л) $(x^2+x+1)^x<1$; м) $(x^2-x+1)^x<1$.

Ответы: а) 0; б) $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$; в) $\left(-\infty; \frac{7}{5}\right]$; г) $\left[\frac{6}{5}; \infty\right)$; д) $(1; 4]$; е) $\left(\frac{5}{3}; 2\right)$; ж) $[2; 3]\cup[4; \infty)$; з) $(-\infty; 1]\cup\{3\}$; и) $(-\infty; 0]$; к) $[0; \infty)$; л) $(-\infty; -1)$; м) $(-\infty; 0)\cup(0; 1)$.

3. Решите систему показательных уравнений:

а) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=\frac{1}{9};\\ y-x=2\end{cases}$ б) $\begin{cases}2^y\cdot 5^{-x}=200\\ x+y=1\end{cases}$;

в) $\begin{cases}3^{x-3y+1}=27\\ 2^{2x+y+2}=32\end{cases}$; г) $\begin{cases}5^{2x+y+2}=125\\ 3^{x-2y+1}=\frac{1}{9}\end{cases}$;

д) $\begin{cases}2^{3xy-x^2+y^2-x}=256\\ 3^{2x-y+1}=3\end{cases}$; е) $\begin{cases}5^{2xy+x^2-3y-2}=125\\ 2^{x-2y+3}=8\end{cases}$;

ж) $\begin{cases}4\cdot 5^{x-1}+0,1\cdot 2^{y+2}=4,2\\ 25^x+2^y=25,5\end{cases}$; з) $\begin{cases}0,5\cdot 3^{x+1}+7,5\cdot 5^{y-1}=12\\ 2\cdot 9^x+5^y=23\end{cases}$;

и) $\begin{cases}2^{2x-2y}+2^{x-y}=0\\ 2^{2x+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2y-1}=5\end{cases}$; к) $\begin{cases}3^{2x-2y}+2\cdot 3^{x-y}-3=0\\ 3^x+3^{1-y}=4\end{cases}$.

Ответы: а) (−2; 0); б) (−2; 3); в) $\left(\frac{11}{7}; -\frac{1}{7}\right)$; г) $\left(-\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right)$; д) (1; 2), $\left(-\frac{8}{9}; \frac{16}{9}\right)$; е) (2; 1), $\left(-\frac{5}{4}; -\frac{5}{8}\right)$; ж) (1; −1); з) (1; 1); и) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; к) (0; 0), (1; 1).

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 44–46. Логарифмы и их свойства

Цель: рассмотреть понятие логарифма и свойства логарифмов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Решите уравнение $2^{2x^2} - 5\cdot 2^{x^2+2x} + 4\cdot 2^{4x} = 0$.

2. Решите неравенство $(0{,}3)^{\frac{x-2}{2x+1}} \ge 1$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\cdot 3^{x-1} + 3\cdot 5^{y+1} = 81 \\ 3^{2x} + 4\cdot 5^{y} = 101 \end{cases}$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $3^{2x^2} - 10\cdot 3^{x^2+x} + 9\cdot 3^{2x} = 0$.

2. Решите неравенство $(0{,}2)^{\frac{2x-1}{x+3}} \ge 1$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3\cdot 2^{x+1} + 4\cdot 3^{y-1} = 24 \\ 3\cdot 2^{2x} + 3^{y} = 21 \end{cases}$.

III. Изучение нового материала

Логарифм числа

Понятие логарифма числа связано с решением показательных уравнений.

Пример 1

Остановимся на решении двух показательных уравнений. Решение уравнения $2^x = 64$ труда не вызывает. Так как $64 = 2^6$, то данное уравнение принимает вид $2^x = 2^6$. Поэтому уравнение имеет единственное решение $x = 6$.

Теперь рассмотрим аналогичное уравнение $2^x = 63$. По теореме о корне это уравнение также имеет единственное решение. Однако, в отличие от предыдущего уравнения, это решение является иррациональным числом. Докажем это от противного. Предположим, что корень данного уравнения является числом рациональным, т. е. $x = \frac{m}{n}$ (где m и n – натуральные числа). Тогда выполняется равенство $2^{\frac{m}{n}} = 63$ или $2^m = 63^n$. Но 2 в любой натуральной степени будет числом четным, а 63 в любой натуральной степени – числом нечетным. Получаем противоречие, которое и доказывает, что корень данного уравнения – число иррациональное.

Поэтому для обозначения такого корня приходится вводить новое понятие и новый символ – логарифм. Чуть забегая вперед, скажем, что корень уравнения $2^x = 63$ обозначается символом $x = \log_2 63$.

Остановимся теперь на понятии логарифма числа. Очень часто приходится решать задачу: известно, что $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$); необходимо найти показатель степени x, т. е. решать задачу, **обратную возведению числа в степень**. При нахождении этого показателя степени x и возникает **понятие логарифма числа b по основанию a** ($x = \log_a b$). Дадим теперь точное определение.

Логарифмом числа b ($b > 0$) **по основанию a** ($a > 0$, $a \neq 1$) называется **показатель степени**, в которую надо **возвести основание** a, чтобы **получить число b**. Это число обозначается символом $\log_a b$ (т. е. по определению $a^{\log_a b} = b$).

Пример 2

а) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$, так как $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 3^4 = 81$;

б) $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$, так как $(\sqrt{2})^6 = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8$;

в) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8} = -3$, так как $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$;

г) $\log_a 1 = 0$ ($a > 0$, $a \neq 1$), так как $a^0 = 1$;

д) $\log_a a = 1$ ($a > 0$, $a \neq 1$), так как $a^1 = a$;

е) $\log_2(-7)$, $\log_1 3$, $\log_{(-4)} 5$ – не определены.

Рассмотрим более сложные задачи.

Пример 3

Вычислим: а) $\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$; б) $\log_a\left(a\sqrt{a\sqrt{a}}\right)$ $(a>0, a\neq 1)$.

а) Пусть данный логарифм равен x. Тогда по определению логарифма имеем показательное уравнение: $(\sqrt{3})^x=\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$ или $3^{\frac{x}{2}}=3^{-\frac{4}{3}}$, откуда $\frac{x}{2}=-\frac{4}{3}$ и $x=-\frac{8}{3}$. Итак, $\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}=-\frac{8}{3}$.

б) Обозначим данный логарифм буквой x. Тогда по определению логарифма получаем показательное уравнение: $a^x=a\sqrt{a\sqrt{a}}$, или $a^x=a\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{4}}$, или $a^x=a^{1\frac{3}{4}}$, откуда $x=1\frac{3}{4}$. Итак, $\log_a\left(a\sqrt{a\sqrt{a}}\right)=1\frac{3}{4}$.

Пример 4

Решим уравнение: а) $\log_8\left(x^2+x\right)=\frac{1}{3}$; б) $\log_{x-2}25=2$.

а) По определению логарифма получаем квадратное уравнение $x^2+x=8^{\frac{1}{3}}$ или $x^2+x-2=0$, которое имеет два корня: $x_1=1$ и $x_2=-2$.

б) Используя определение логарифма, имеем уравнение $(x-2)^2=25$. Так как $x-2>0$ и $x-2\neq 1$, то получаем линейное уравнение $x-2=5$, откуда $x=7$.

Основные свойства логарифмов

Эти свойства следуют из определения логарифма и свойств показательной функции. При любом $a>0$ и $a\neq 1$ и любых положительных числах x и y выполнены **равенства**

1) $\log_a 1=0$; 2) $\log_a a=1$;

3) $a^{\log_a x}=x$ (основное логарифмическое тождество);

4) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$ (логарифм произведения чисел равен сумме логарифмов этих чисел);

5) $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ (логарифм частного чисел равен разности логарифмов этих чисел);

6) $\log_a x^p=p\log_a x$ для любого p (логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени);

7) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (формула перехода к новому основанию: логарифм числа равен отношению логарифма этого числа по новому основанию к логарифму старого основания по новому основанию).

Пример 5

Докажем свойство 4.

Используя основное логарифмическое тождество, запишем, с одной стороны, $xy=a^{\log_a(xy)}$. С другой стороны, справедливы равенства $x=a^{\log_a x}$ и $y=a^{\log_a y}$. Перемножив их, получим: $xy=a^{\log_a x}\cdot a^{\log_a x}=a^{\log_a x+\log_a y}$. Сравнивая два выражения для произведения xy, имеем: $a^{\log_a(xy)}=a^{\log_a x+\log_a y}$, откуда $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$.

Для двух оснований приняты **специальные обозначения логарифмов**: основание 10 (десятичные логарифмы – lg) и основание $e=2{,}718\ldots$ (натуральные логарифмы – ln).

Чтобы освоиться с понятием логарифма, рассмотрим следующие примеры.

Пример 6

Вычислим выражения:

а) $8^{\log_2 5}$; б) $\log_3 4+\log_3 12-\log_3 16$;

в) $\dfrac{\lg 8+\lg 18}{2\lg 2+\lg 3}$; г) $\log_3 5\cdot\log_4 9\cdot\log_5 2$.

а) Используя основное логарифмическое тождество, получим:
$8^{\log_2 5}=(2^3)^{\log_2 5}=2^{3\log_2 5}=(2^{\log_2 5})^3=5^3=125$.

б) Применяя свойства логарифмов для произведения и частного, имеем:

$$\log_3 4+\log_3 12-\log_3 16=\log_3\frac{4\cdot 12}{16}=\log_3 3=1.$$

в) Используя свойства логарифмов, получим:

$$\frac{\lg 8+\lg 18}{2\lg 2+\lg 3}=\frac{\lg(8\cdot 18)}{\lg 2^2+\lg 3}=\frac{\lg 144}{\lg 4+\lg 3}=\frac{\lg 12^2}{\lg(4\cdot 3)}=\frac{2\lg 12}{\lg 12}=2.$$

г) Так как основания логарифмов разные, то перейдем к одному основанию, например 3. При этом $\log_4 9=\dfrac{\log_3 9}{\log_3 4}=\dfrac{2}{\log_3 2^2}=\dfrac{2}{2\log_3 2}=$

$=\dfrac{1}{\log_3 2}$ и $\log_5 2=\dfrac{\log_3 2}{\log_3 5}$. Тогда получаем: $\log_3 5\cdot\log_4 9\cdot\log_5 2=$

$=\log_3 5\cdot\dfrac{1}{\log_3 2}\cdot\dfrac{\log_3 2}{\log_3 5}=1$.

Разумеется, свойства логарифмов можно использовать и в более сложных задачах.

Пример 7

Вычислим значения выражений:

а) $\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{(\sin a)^{\lg\cos a}}{(\cos a)^{\lg\sin a}}$;

в) $11^{\log_{12}13}-13^{\log_{12}11}$; г) $\lg\operatorname{tg}1^\circ+\lg\operatorname{tg}2^\circ+\ldots+\lg\operatorname{tg}89^\circ$.

а) Учтем, что $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3-2=1$, откуда $\sqrt{3}-\sqrt{2}=$ $=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1}$. Теперь легко посчитать данное выражение:

$\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1}}=\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{2}$.

б) Используем основное логарифмическое тождество. Тогда $\sin a=10^{\lg\sin a}$ и $\cos a=10^{\lg\cos a}$. Данное выражение имеет вид $\dfrac{(\sin a)^{\lg\cos a}}{(\cos a)^{\lg\sin a}}=$

$=\dfrac{(10^{\lg\sin a})^{\lg\cos a}}{(10^{\lg\cos a})^{\lg\sin a}}=\dfrac{10^{\lg\sin a\cdot\lg\cos a}}{10^{\lg\cos a\cdot\lg\sin a}}=1$.

в) Вновь применим основное логарифмическое тождество. Так как в данном выражении уже есть логарифмы по основанию 12, то запишем числа в виде $11=12^{\log_{12}11}$ и $13=12^{\log_{12}13}$. Теперь вычислим значение данного выражения: $11^{\log_{12}13}-13^{\log_{12}11}=12^{\log_{12}11\cdot\log_{12}13}-12^{\log_{12}13\cdot\log_{12}11}=0$.

г) Используем формулу для логарифма произведения чисел, группировку множителей и формулу приведения. Получаем: $\lg\operatorname{tg}1^\circ+\lg\operatorname{tg}2^\circ+\lg\operatorname{tg}3^\circ+\ldots+\lg\operatorname{tg}45^\circ+\ldots+\lg\operatorname{tg}87^\circ+\lg\operatorname{tg}88^\circ+\lg\operatorname{tg}89^\circ=$

$=\lg(\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}45^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}87^\circ\cdot\operatorname{tg}88^\circ\cdot\operatorname{tg}89^\circ)=$

$=\lg\big((\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}89^\circ)\cdot(\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{tg}88^\circ)\cdot(\operatorname{tg}3^\circ\cdot\operatorname{tg}87^\circ)\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}45^\circ\big)=$

$=\lg\big((\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{ctg}1^\circ)\cdot(\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{ctg}2^\circ)\cdot(\operatorname{tg}3^\circ\cdot\operatorname{ctg}3^\circ)\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}45^\circ\big)=\lg 1=0$.

Пример 8

Решим уравнение $\log_2(2x+3)+2\log_2 3=\log_2(x+2)+3\log_2 5-\log_2 7$.

Сгруппируем члены уравнения, зависящие от x, в левой части, не зависящие от x, – в правой. Используем свойства логарифмов и преобразуем уравнение. Получаем: $\log_2(2x+3)-\log_2(x+2)=$ $=3\log_2 5-2\log_2 3-\log_2 7$, или $\log_2\dfrac{2x+3}{x+2}=\log_2 5^3-\log_2 3^2-\log_2 7$, или $\log_2\dfrac{2x+3}{x+2}=\log_2\dfrac{125}{9\cdot 7}$. Так как равны логарифмы величин, то равны и сами величины. Получаем рациональное уравнение $\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{125}{63}$, тогда $63(2x+3)=125(x+2)$ или $126x+189=125x+250$, откуда $x=61$.

Пример 9

Прологарифмируем по основанию 3 выражение $A=81a^5b\sqrt{b}$ (т. е. выразим $\log_3 A$ через величины $\log_3 a$ и $\log_3 b$).

Используя основные свойства логарифмов, имеем: $\log_3 A=$

$$=\log_3(81a^5b\sqrt{b})=\log_3\left(3^4a^5b^{\frac{3}{2}}\right)=\log_3 3^4+\log_3 a^5+\log_3 b^{\frac{3}{2}}=$$

$$=4+5\log_3 a+\frac{3}{2}\log_3 b.$$

Пример 10

Найдем: а) $\log_2 3$, если $\log_{12}128=a$; б) $\log_{175}56$, если $\log_{14}7=a$; в) $\lg(0{,}175)^4$, если $\lg 196=c$, $\lg 56=d$.

а) $\log_{12}128=\dfrac{\log_2 128}{\log_2 12}=\dfrac{\log_2 2^7}{\log_2(2^2\cdot 3)}=\dfrac{7}{\log_2 2^2+\log_2 3}=\dfrac{7}{2+\log_2 3}=a.$

Тогда имеем: $7=2a+a\log_2 3$ и $\log_2 3=\dfrac{7-2a}{a}$.

б) $\log_{175}56=\dfrac{\log_{14}56}{\log_{14}175}=\dfrac{\log_{14}(2^3\cdot 7)}{\log_{14}(5^2\cdot 7)}=\dfrac{\log_{14}2^3+\log_{14}7}{\log_{14}5^2+\log_{14}7}=$

$$=\frac{3\log_{14}2+\log_{14}7}{2\log_{14}5+\log_{14}7}=\frac{3\log_{14}2+a}{2b+a}=\frac{3\log_{14}\frac{14}{7}+a}{2b+a}=\frac{3(\log_{14}14-\log_{14}7)+a}{2b+a}=$$

$$=\frac{3(1-a)+a}{2b+a}=\frac{3-2a}{2b+a}.$$

В данном примере необходимо было найти $\log_{14} 2$, поэтому число 2 пришлось выразить через числа 14 и 7 ($2 = 14/7$), логарифмы которых по основанию 14 были известны.

в) $\lg(0{,}175)^4 = 4\lg 0{,}175 = 4\lg\dfrac{175}{1000} = 4\lg\dfrac{7}{40} = 4(\lg 7 - \lg 40) =$

$= 4\left[\lg 7 - \lg\left(10\cdot 2^2\right)\right] = 4\left[\lg 7 - (\lg 10 + 2\lg 2)\right] = 4(\lg 7 - 2\lg 2 - 1).$

Таким образом, задача будет решена, если удастся найти lg7 и lg2 по известным значениям $\lg 196 = c$ и $\lg 56 = d$. Имеем:
$\lg 196 = \lg\left(2^2\cdot 7^2\right) = 2\lg(2\cdot 7) = 2(\lg 2 + \lg 7) = c$;
$\lg 56 = \lg\left(2^3\cdot 7\right) = \lg 2^3 + \lg 7 = 3\lg 2 + \lg 7 = d$.

Если обозначить $\lg 2 = x$, $\lg 7 = y$, то для их определения получаем систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x + 2y = c; \\ 3x + y = d. \end{cases}$ Из нижнего уравнения имеем: $y = d - 3x$. Подставляя это выражение в верхнее уравнение, получим: $2x + 2(d - 3x) = c$ или $-4x + 2d = c$, откуда $x = \dfrac{2d - c}{4}$. Тогда $y = d - 3\cdot\dfrac{2d - c}{4} = \dfrac{3c - 2d}{4}$.

Учтем, что $\lg(0{,}175)^4 = 4(y - 2x - 1) = 4\left(\dfrac{3c - 2d}{4} - 2\dfrac{2d - c}{4} - 1\right) =$

$= 5c - 6d - 4.$

IV. Задание на уроках

№ 476 (а, б); 478 (в, г); 481 (а, г); 482 (а); 483 (б); 484 (г); 486 (а, б); 487 (а); 489 (б); 490 (в); 491 (а); 494 (б); 495 (г); 496 (а); 497 (а, в).

V. Контрольные вопросы

1. Дайте определение логарифма числа.
2. Перечислите основные свойства логарифмов (фронтальный опрос у доски).
3. Докажите любое свойство логарифмов (по своему выбору).

VI. Задание на дом

№ 476 (в, г); 478 (а, б); 481 (б, в); 482 (в); 483 (г); 485 (а); 486 (б, г); 487 (в); 489 (г); 490 (б); 492 (в); 494 (в); 495 (б); 496 (г); 497 (б, г); 498 (а, б).

VII. Творческие задания

1. Упростите выражения:

а) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$;   б) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$;

в) $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$; г) $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$;

д) $\dfrac{\log_a \sqrt{a^2-1} \cdot \log^2_{\frac{1}{a}} \sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1) \cdot \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[6]{a^2-1}}$; е) $a^{\frac{2}{\log_b a}+1} b - 2a^{\log_a b+1} b^{\log_b a+1} + ab^{\frac{2}{\log_a b}+1}$;

ж) $(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b)\log_b a - 1$;

з) $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}$;

и) $\left[\left(\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2\right)^{\frac{1}{2}} + 2\right]^{\frac{1}{2}} - \log_b a - \log_a b$.

Ответы: а) 10; б) 890; в) 3; г) 2; д) $\log_a \sqrt{a^2-1}$; е) $ab(a-b)^2$; ж) $\log_a b$; з) $a+b$; и) 0, если $0 < a, b < 1$ или $a, b > 1$, и $-2(\log_a b + \log_b a)$, если $a > 1, 0 < b < 1$ или $0 < a < 1, b > 1$.

2. Найдите сумму $2^x + 2^{-x}$, если $4^x + 4^{-x} = 23$.

Ответ: 5.

3. Найдите $\log_{abcd} x$, если $\log_a x = \alpha$, $\log_b x = \beta$, $\log_c x = \gamma$, $\log_d x = \delta$ и $x \neq 1$.

Ответ: $\dfrac{1}{\alpha^{-1} + \beta^{-1} + \gamma^{-1} + \delta^{-1}}$.

4. Найдите зависимость α от γ, если $\beta = 10^{\frac{1}{1-\lg\alpha}}$ и $\gamma = 10^{\frac{1}{1-\lg\beta}}$.

Ответ: $\alpha = 10^{\frac{1}{1-\lg\gamma}}$.

5. Найдите $\log_{30} 8$, если $\lg 5 = a$ и $\lg 3 = b$.

Ответ: $\dfrac{3(1-a)}{1+b}$.

6. Найдите $\lg 56$, если $\lg 2 = a$ и $\log_2 7 = b$.

Ответ: $a(b+3)$.

7. Найдите $\log_9 42$, если $\log_2 42 = a$ и $\log_7 42 = b$.

Ответ: $\dfrac{1}{2(ab-a-b)}$.

VIII. Подведение итогов уроков

Уроки 47–48. Логарифмическая функция

Цель: рассмотреть логарифмическую функцию, ее свойства и график.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Сформулируйте и докажите свойство логарифма произведения чисел.

2. Найдите значения выражений:

а) $\log_{\sqrt{2}} 8\sqrt[4]{2}$; б) $9^{\log_3 2}+\dfrac{\log_5 100-2\log_5 2}{\log_{12} 3+\log_{12} 4}$.

3. Решите уравнение $\lg(x-3)-2\lg 3=\lg 5-\lg 6$.

Вариант 2

1. Сформулируйте и докажите свойство логарифма частного чисел.

2. Найдите значения выражений:

а) $\log_{\sqrt{3}} 9\sqrt[3]{3}$; б) $8^{\log_2 3}+\dfrac{\log_4 80-\log_4 5}{\log_{12} 3+2\log_{12} 2}$.

3. Решите уравнение $\lg(2-x)+\lg 5=\lg 15+2\lg 2$.

III. Изучение нового материала

Функцию, заданную формулой $y=\log_a x$ (где $a>0$, $a\neq 1$), называют логарифмической функцией с основанием a.

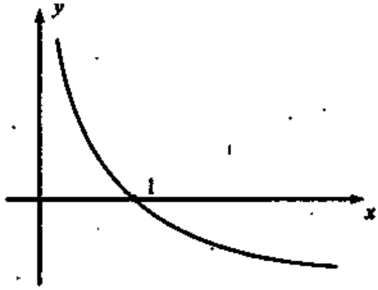
Перечислим **основные свойства** такой **функции.**

1. **Область определения** – множество всех положительных чисел R_+.

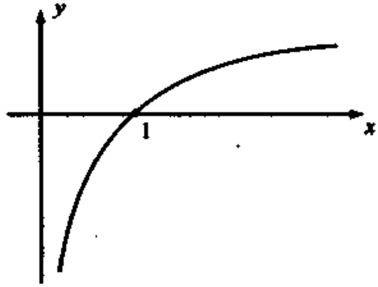
2. **Область значений** – множество всех действительных чисел R.

3. **Монотонность**: при $0<a<1$ функция убывающая, при $a>1$ функция возрастающая.

4. При всех значениях a **график** логарифмической функции **пересекает ось абсцисс в точке $x=1$** (графики логарифмической функции приведены на рисунках).

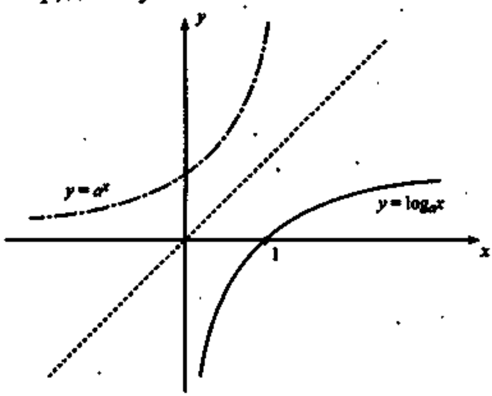


для $0 < a < 1$



для $a > 1$

Заметим, что **графики показательной и логарифмической функций**, имеющих одинаковое основание a (как и любых взаимообратных функций), **симметричны относительной прямой $y = x$**. На рисунке приведены графики показательной и логарифмической функции, например, для случая $a > 1$.



для $a > 1$

Рассмотрим примеры использования свойств логарифмической функции.

Пример 1

Найдем область определения функции $y = \log_2\left(-x^2 + 2x + 3\right)$.

Область определения логарифмической функции – множество всех положительных чисел R_+. Поэтому данная функция определена при всех x, для которых выполнено неравенство: $-x^2 + 2x + 3 > 0$ или $x^2 - 2x - 3 < 0$. Решение этого квадратного неравенства $x \in (-1;\ 3)$. Итак, область определения данной функции $D(y) = (-1;\ 3)$.

Пример 2

Найдем область определения функции $y=\sqrt{\log_{0,3}(2x-1)}$.

Область определения данной функции задается неравенством $\log_{0,3}(2x-1)\ge 0$. Запишем его в виде $\log_{0,3}(2x-1)\ge \log_{0,3}1$. Так как основание логарифма 0,3 меньше единицы, то логарифмическая функция убывающая. Поэтому полученное неравенство равносильно двойному линейному неравенству: $0<2x-1\le 1$ или $1<2x\le 2$, решение которого $x\in\left(\frac{1}{2};1\right]$. Следовательно, область определения данной функции $D(y)=\left(\frac{1}{2};1\right]$.

Пример 3

Найдем область значений функции $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x+3)$.

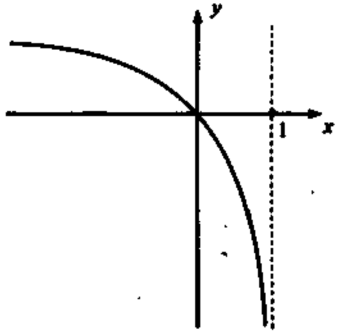
Как и в примере 1, область определения данной функции $D(y)=(-1;3)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $z(x)=-x^2+2x+3$. Ее графиком является парабола, направленная ветвями вниз с вершиной в точке с координатами $x=1$ и $z=4$. При изменении x на промежутке $(-1;3)$ значения $z\in(0;4]$. Функция $y=\log_{\frac{1}{2}}z$ является убывающей, так как основание $\frac{1}{2}$ логарифма меньше единицы. Поэтому значения y меняются от $+\infty$ до $\log_{\frac{1}{2}}4=-2$. Итак, область значений данной функции $E(y)=[-2;+\infty)$.

Пример 4

Покажем, что функция $y(x)=\log_3(1-x)$ убывающая.

Область определения этой функции $D(y)=(-\infty;1)$. Рассмотрим два произвольных значения аргумента x_1 и x_2 из области определения таких, что $x_2>x_1$. Найдем значения функции в этих точках: $y(x_1)=\log_3(1-x_1)$ и $y(x_2)=\log_3(1-x_2)$. Определим знак разности: $y(x_2)-y(x_1)=\log_3(1-x_2)-\log_3(1-x_1)=\log_3\frac{1-x_2}{1-x_1}$. Для этого преобразуем аргумент к удобному виду: $\frac{1-x_2}{1-x_1}=\frac{(1-x_1)-(x_2-x_1)}{1-x_1}=$

$=1-\frac{x_2-x_1}{1-x_1}$. Так как $x_2 > x_1$ и $x_1 < 1$, то дробь $\frac{x_2-x_1}{1-x_1}$ положительна и величина $0<1-\frac{x_2-x_1}{1-x_1}<1$. Для таких значений аргумента логарифм с основанием 3 (бóльшим единицы) отрицательный. Тем самым показано, что $y(x_2)-y(x_1)<0$ или $y(x_2)<y(x_1)$. Тогда по определению функция $y(x)$ убывающая. Для наглядности на рисунке приведен график этой функции.



Пример 5

Установить четность (или нечетность) функции $y(x)=\log_{0,4}(x\sin x)$.

Сначала найдем область определения функции. Она задается неравенством $x\sin x>0$. При $x > 0$ получаем $\sin x > 0$. Решение этого неравенства $x\in(2\pi n;\ \pi+2\pi n)$, где $n\in Z$, и $n \geq 0$. При $x < 0$ имеем $\sin x<0$. Решение такого неравенства $x\in(-\pi+2\pi k;\ 2\pi k)$, где $k\in Z$ и $k \leq 0$. Построив эти промежутки на числовой оси, легко увидеть, что область определения функции является симметричным множеством.

Теперь найдем $y(-x)=\log_{0,4}(-x\sin(-x))=\log_{0,4}(x\sin x)=y(x)$. Так как выполнено равенство $y(-x)=y(x)$, то по определению функция $y(x)$ четная.

Достаточно часто встречаются задачи, связанные с построением графиков логарифмических функций. Для их построения используют те же приемы, что и для функций других видов. В ряде случаев функцию предварительно необходимо преобразовать.

Пример 6

Построим графики функций:

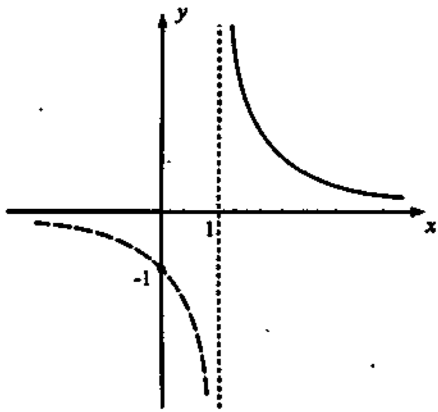
а) $y = 3^{\log_{\frac{1}{3}}(x-1)}$; б) $y = \log_2\left(1-|x|\right)$;

в) $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \log_2\sqrt{4x^2-4x-1} + 0{,}5^{1-2x}$;

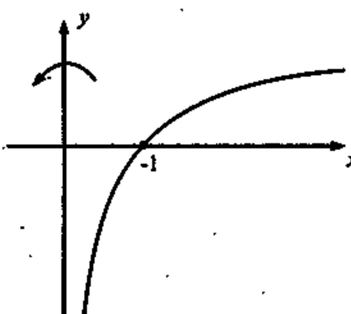
г) $y = \sqrt[32]{\log_{56}\cos^{1990} x}$.

а) Учтем, что $x-1>0$, т. е. $x>1$. Перейдем в логарифме к основанию 3: $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) = \dfrac{\log_3(x-1)}{\log_3\frac{1}{3}} = -\log_3(x-1)$. Тогда $y = 3^{-\log_3(x-1)} =$

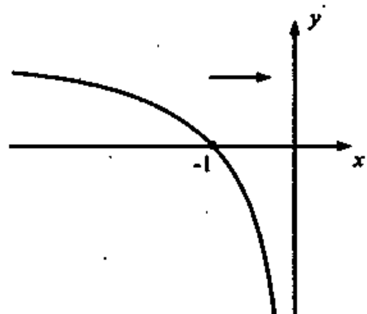
$= (3^{\log_3(x-1)})^{-1} = (x-1)^{-1} = \dfrac{1}{x-1}$ (при условии $x>1$).



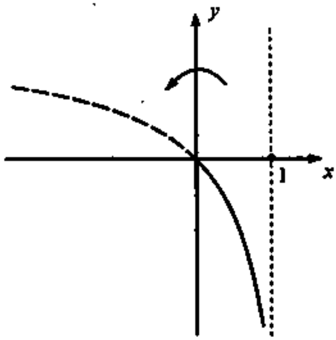
б) Очевидно, что этот график легко построить, используя схему: $y=\log_2 x \to y=\log_2(-x) \to y=\log_2(1-x) \to y=\log_2\left(1-|x|\right)$.



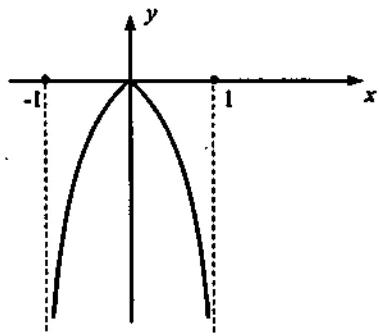
$y=\log_2 x$



$y=\log_2(-x)$



$y=\log_2(1-x)$



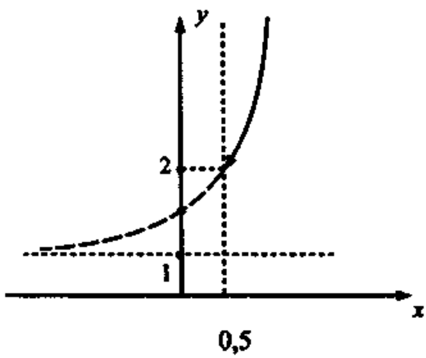
$y=\log_2(1-|x|)$

в) $D(y)$ функции найдем из условий: $\begin{cases} x-\dfrac{1}{2}>0; \\ \sqrt{4x^2-4x-1}>0 \end{cases}$ или

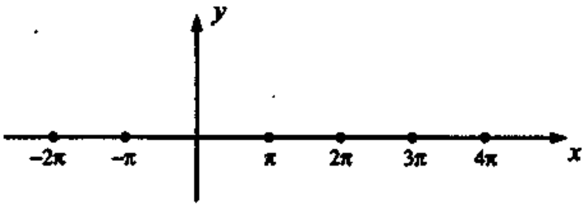
$\begin{cases} x-\dfrac{1}{2}>0; \\ \sqrt{(2x-1)^2}>0 \end{cases}$, $\begin{cases} x-\dfrac{1}{2}>0; \\ |2x-1|>0 \text{ и } x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right) \end{cases}$. Тогда $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+$

$$+\log_2(2x-1)+0{,}5^{1-2x}=\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\log_2 2+\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)+0{,}5^{1-2x}=$$

$$=\frac{\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\log_2\frac{1}{2}}+1+\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)+0{,}5^{1-2x}=1+0{,}5^{1-2x}=1+2^{2x-1}.$$



г) Несмотря на устрашающий вид функции y, график ее очень простой. $D(y)$ функции задается условием $\log_{56} \cos^{1990} x \geq 0$, т. е. $\cos^{1990} x \geq 1$. Отсюда $\cos x = \pm 1$ или $x = \pi n$, $n \in Z$. В этих точках $y = 0$.



Свойства монотонности логарифмической функции используются для **сравнения чисел.**

Пример 7

Сравним числа: а) $\log_5 7$ и $\log_5 8$; б) $\log_{\frac{1}{5}} 7$ и $\log_{\frac{1}{5}} 8$;

в) $\log_5 7 + \log_5 8$ и $\log_5(7+8)$; г) $\log_5 23$ и $\log_6 39$; д) $\log_3 4$ и $\log_4 5$.

а) Логарифмическая функция с основанием, бóльшим единицы, является возрастающей, т. е. бóльшему значению аргумента соответствует бóльшее значение функции. Так как $7 < 8$, то и $\log_5 7 < \log_5 8$, т. е. второе число больше.

б) Логарифмическая функция с основанием меньше единицы убывает в области определения, т. е. бóльшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Так как $7 < 8$, то $\log_{\frac{1}{5}} 7 > \log_{\frac{1}{5}} 8$, т. е. первое число больше.

в) Используя формулу логарифма произведения чисел, представим первое число в виде $\log_5 7 + \log_5 8 = \log_5(7 \cdot 8) = \log_5 56$. При этом второе число $\log_5(7+8) = \log_5 15$. Так как $56 > 15$ и основание логарифма 5 больше единицы, то $\log_5 56 > \log_5 15$ или $\log_5 7 + \log_5 8 > \log_5(7+8)$, т. е. первое число больше.

г) Оценим данные числа. Учтем, что основания логарифмов больше единицы. Так как $23 < 25$, то $\log_5 23 < \log_5 25 = 2$. Учтем, что $39 > 36$, и тогда $\log_6 39 > \log_6 36 = 2$. Итак, первое число меньше 2, а второе число больше 2. Поэтому $\log_5 23 < \log_6 39$, т. е. второе число больше.

д) Очевидно, что оба числа $\log_3 4$ и $\log_4 5$ больше единицы. Рассмотрим отношение этих чисел: $\dfrac{\log_4 5}{\log_3 4} = \log_4 5 \cdot \log_4 3$ (использовали формулу перехода к новому основанию). Сравним такое отношение с единицей. Для этого используем неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим двух чисел:

$\sqrt{\log_4 5\cdot\log_4 3} < \frac{\log_4 5+\log_4 3}{2} = \frac{\log_4 15}{2} < \frac{\log_4 16}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Таким образом, доказано, что $\sqrt{\log_4 5\cdot\log_4 3} < 1$ и $\log_4 5\cdot\log_4 3 < 1$. Тогда $\frac{\log_4 5}{\log_3 4} < 1$ или $\log_4 5 < \log_3 4$, т. е. первое число больше.

IV. Задание на уроках

№ 499 (а, б); 500 (в); 502 (в, г); 503 (а, б); 504 (в, г); 505 (а, б); 506 (в, г); 507 (а, г); 508 (в); 509 (б); 511 (г).

V. Контрольные вопросы

1. Дайте определение логарифмической функции.
2. Приведите графики логарифмической функции.
3. Перечислите основные свойства логарифмической функции (фронтальный опрос).

VI. Задание на дом

№ 499 (в, г); 500 (б); 502 (а, б); 503 (в, г); 504 (а, б); 505 (в, г); 506 (а, б); 507 (б, в); 508 (г); 509 (а); 511 (б).

VII. Творческие задания

Постройте графики функций, уравнений, неравенств:

1) $y=\log_4|x-2|$;
2) $y=\log_4|x|-2$;
3) $y=|\log_4 x-2|$;
4) $|y|=\log_4 x$;
5) $|y|=\log_4|x|$;
6) $y\ge\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x+4)$;
7) $y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)$;
8) $y\le\log_{\frac{1}{2}}(1-|x|)$;
9) $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2-9}{x-3}$;
10) $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x-1}{x+1}$;
11) $y=\log_3 \operatorname{tg} x$;
12) $y=\log_{\frac{1}{3}}|\cos x|$;
13) $y=\log_{\sin x} 2$;
14) $y=(\sin x)^{\log_{\sin x}(x+2)}$.

VIII. Подведение итогов уроков

Уроки 49–53. Решение логарифмических уравнений и неравенств

Цели: систематизировать виды логарифмических выражений и рассмотреть способы решений уравнений, систем уравнений, неравенств.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Найдите область определения функции $y=\log_{0,3}\frac{1-3x}{x+1}$.

Ответы: а) $(0;\infty)$; б) $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$; в) $\left(\frac{1}{3};\infty\right)$; г) $(-\infty;-1)$.

2. Найдите наименьшее значение функции $y=\log_4\left(x^2-6x+11\right)$.

Ответы: а) $\log_4 11$; б) 1; в) −2; г) 0,5.

3. Решите уравнение $\log_7(3-2x)=\frac{1}{3}\log_3 64+\log_3\frac{3}{4}$.

Ответы: а) −2; б) 1; в) −23; г) −4.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции $y=\log_{0,4}\frac{x-3}{2x+1}$.

Ответы: а) $(0;\infty)$; б) $\left(-\frac{1}{2};3\right)$; в) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(3;\infty)$; г) $(3;\infty)$.

2. Найдите наибольшее значение функции $y=\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+4x+7\right)$.

Ответы: а) −1; б) $\log_{\frac{1}{3}}7$; в) 2; г) 1.

3. Решите уравнение $\log_5(2-3x)=\frac{1}{4}\log_{12}81+\log_{12}4$.

Ответы: а) −16; б) −1; в) 0,5; г) −6.

III. Изучение нового материала

Логарифмические уравнения

Логарифмическим уравнением называют уравнение, в котором **неизвестная входит только в аргументы логарифмических функций** при некоторых постоянных основаниях.

Пример 1

а) Уравнение $\log_3(x^2+2x)+2\log_5(x^3+1)=7$ – логарифмическое.

б) Уравнение $\log_3(x^2+2x)+x\log_5(x^3+1)=7$ не является логарифмическим.

Так как логарифмическая функция $\log_a x$ монотонна и ее область значений $(-\infty;\ \infty)$, то простейшее логарифмическое уравнение $\log_a x=b$ имеет **единственный корень**. Именно к виду $\log_a x=b$ надо сводить более сложные уравнения. Типы и способы решения логарифмических уравнений схожи с показательными уравнениями.

1. Простейшие уравнения

Пример 2

Решим уравнение $\log_{\frac{1}{9}}(2x^2-2x-1)=-\dfrac{1}{2}$.

По определению логарифма получаем уравнение $2x^2-2x-1=\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$, или $2x^2-2x-1=3$, или $x^2-x-2=0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1=-1$ и $x_2=2$ также являются решениями данного логарифмического уравнения.

Пример 3

Решим уравнение $\log_{25}\left[\dfrac{1}{5}\log_3\left(2-\log_{\frac{1}{2}}x\right)\right]=-\dfrac{1}{2}$.

Несмотря на громоздкость этого уравнения, оно тоже относится к простейшим. Используя определение логарифма, получаем: $\dfrac{1}{5}\log_3\left(2-\log_{\frac{1}{2}}x\right)=25^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{5}$ или $\log_3\left(2-\log_{\frac{1}{2}}x\right)=1$. Вновь используем определение логарифма. Имеем: $2-\log_{\frac{1}{2}}x=3^1=3$, откуда $\log_{\frac{1}{2}}x=-1$. Еще раз применяя определение логарифма, находим $x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}=2$.

Особенностью логарифмических уравнений (в отличие от показательных) является **появление посторонних решений**. Это связано с **расширением ОДЗ** уравнения в ходе его преобразований. Поэтому полученные **корни** необходимо **проверять подстановкой или следить за изменением ОДЗ.**

Пример 4

Рассмотрим уравнение $\log_3(x^2-4)=\log_3(4x-7)$.

Его ОДЗ задается неравенствами $\begin{cases} x^2-4>0 \\ 4x-7>0 \end{cases}$. Решая эту систему неравенств, получаем: $\begin{cases} x\in(-\infty;\ 2)\cup(2;\ \infty) \\ x\in\left(\dfrac{7}{4};\ \infty\right) \end{cases}$, откуда $x\in(2;\ \infty)$.

Так как в данном уравнении равны логарифмы двух величин, то равны и сами величины. Получаем квадратное уравнение $x^2-4=4x-7$ или $x^2-4x+3=0$. Очевидно, ОДЗ этого уравнения $x\in(-\infty;\ \infty)$, т. е. произошло расширение ОДЗ по сравнению с первоначальным уравнением. Корни квадратного уравнения $x_1=1$ и $x_2=3$. Однако в ОДЗ исходного уравнения попадает только число $x=3$, которое и является его решением. Корень $x=1$ является посторонним и возник при расширении ОДЗ.

2. Уравнения, решаемые их преобразованиями

Во многих случаях при решении логарифмического уравнения его необходимо **преобразовать**, используя основные свойства логарифмов.

Пример 5

Решим уравнение $2\log_3(x-2)-\log_3\left(x^2-4x+\dfrac{28}{9}\right)=2$.

ОДЗ уравнения определяется условиями $\begin{cases} x-2>0 \\ x^2-4x+\dfrac{28}{9}>0 \end{cases}$ (решать эту систему неравенств не будем). Сведем данное уравнение к простейшему. Запишем уравнение в виде: $\log_3(x-2)^2-\log_3\left(x^2-4x+\dfrac{28}{9}\right)=2$, или $\log_3\dfrac{(x-2)^2}{x^2-4x+\dfrac{28}{9}}=2$, или $\dfrac{(x-2)^2}{x^2-4x+\dfrac{28}{9}}=3^2=9$, или $x^2-4x+3=0$.

Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. В ОДЗ данного уравнения входит только решение $x = 3$.

Пример 6

Решим уравнение $\log_6 \sqrt{x-2} + \frac{1}{2}\log_6(x-11) = 1$.

ОДЗ уравнения задается условиями $\begin{cases} x-2>0 \\ x-11>0 \end{cases}$, откуда $x \in (11; \infty)$.

Запишем уравнение в виде: $\frac{1}{2}\log_6(x-2) + \frac{1}{2}\log_6(x-11) = 1$, или $\log_6(x-2) + \log_6(x-11) = 2$, или $\log_6(x^2 - 13x + 22) = 2$. По определению логарифма получаем квадратное уравнение $x^2 - 13x + 22 = 36$ или $x^2 - 13x - 14 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 14$ и $x_2 = -1$ (не входит в ОДЗ).

Одним из распространенных преобразований является переход к новому основанию в логарифмах.

Пример 7

Решим уравнение $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 5{,}5$.

В логарифмах перейдем к одному основанию, например числу 2. Получаем: $\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = 5{,}5$ или $\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = 5{,}5$. Чтобы избавиться от дробных множителей, умножим все члены уравнения на число 6. Имеем: $6\log_2 x + 3\log_2 x + 2\log_2 x = 33$ или $11\log_2 x = 33$, откуда $\log_2 x = 3$ и $x = 2^3 = 8$.

Пример 8

Решим уравнение $\log_2 x + \log_5 x = \frac{1}{\lg 5}$.

Перейдем в логарифмах к основанию 5 и получим: $\frac{\log_5 x}{\log_5 2} + \log_5 x = \log_5 10$, или $\log_5 x \cdot (1 + \log_5 2) = \log_5 10 \cdot \log_5 2$, или $\log_5 x(\log_5 5 + \log_5 2) = \log_5 10 \cdot \log_5 2$, или $\log_5 x \cdot \log_5 10 = \log_5 10 \cdot \log_5 2$.

Так как $\log_5 10 \neq 0$, то, разделив обе части уравнения на эту величину, имеем $\log_5 x = \log_5 2$, откуда $x = 2$.

3. Уравнения, решаемые разложением на множители

Пример 9

Решим уравнение $\sqrt{x-1}\log_2(3x^2-5) + 2 = \log_2(3x^2-5) + 2\sqrt{x-1}$.

Перенесем все члены уравнения в левую часть, сгруппируем их и разложим эту часть на множители. Получаем: $\sqrt{x-1}\log_2(3x^2-5)+$ $+2-\log_2(3x^2-5)-2\sqrt{x-1}=0$, или $(\sqrt{x-1}\log_2(3x^2-5))-\log_2(3x^2-5)+$ $+(2-2\sqrt{x-1})=0$, или $\log_2(3x^2-5)\cdot(\sqrt{x-1}-1)-2(\sqrt{x-1}-1)=0$, или $(\log_2(3x^2-5)-2)(\sqrt{x-1}-1)=0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю, а остальные множители имеют смысл. Получаем два уравнения.

а) $\log_2(3x^2-5)-2=0$, тогда $\log_2(3x^2-5)=2$ и $3x^2-5=4$, откуда $x^2=3$ и $x=\pm\sqrt{3}$. Однако при $x=-\sqrt{3}$ второй множитель не имеет смысла.

б) $\sqrt{x-1}-1=0$, тогда $\sqrt{x-1}=1$ и $x-1=1$ и $x=2$. Для этого значения x первый множитель определен.

Итак, данное уравнение имеет два корня: $x_1=\sqrt{3}$ и $x_2=2$.

4. Уравнения, решаемые с помощью замены неизвестной

Этот способ широко используется при решении любых типов уравнений.

Пример 10

Решим уравнение $\log_2^2(2x-1)+\log_2(2x-1)-2=0$.

Сделаем замену $y=\log_2(2x-1)$. Тогда получаем квадратное уравнение $y^2+y-2=0$. Заметим, что ОДЗ исходного уравнения устанавливать нет необходимости, так как если уравнение $y^2+y-2=0$ имеет решения (его корни $y_1=-2$, $y_2=1$), то это означает, что $\log_2(2x-1)$ существует, т. е. $2x-1>0$.

Таким образом, приходим к совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}\log_2(2x-1)=-2\\ \log_2(2x-1)=1\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}2x-1=2^{-2}=\dfrac{1}{4}\\ 2x-1=2^1=2\end{array}\right.$. Отсюда $x_1=\dfrac{5}{8}$, $x_2=\dfrac{3}{2}$.

Пример 11

Решим уравнение $\sqrt{\log_{0,04}(x-1)+1}+\sqrt{\log_{0,2}(x-1)+3}=1$.

Установить ОДЗ этого уравнения достаточно трудно, так как пришлось бы решать логарифмические неравенства, поэтому отметим пока, что $x>1$. Перейдем в первом логарифме к основанию 0,2: $\log_{0,04}(x-1)=\dfrac{\log_{0,2}(x-1)}{\log_{0,2}0{,}04}=\dfrac{1}{2}\log_{0,2}(x-1)$ и введем замену $y=\log_{0,2}(x-1)$.

Тогда уравнение имеет вид $\sqrt{\frac{y}{2}+1}+\sqrt{y+3}=1$. Определим ОДЗ этого уравнения из условий $\begin{cases}\frac{y}{2}+1\ge 0\\ y+3\ge 0\end{cases}$, т. е. $y\in[-2;+\infty)$.

Решим это уравнение, уединив один радикал $\sqrt{\frac{y}{2}+1}=1-\sqrt{y+3}$ и возведя равенство в квадрат: $\frac{y}{2}+1=1-2\sqrt{y+3}+y+3$. Тогда $4\sqrt{y+3}=y+6$. Еще раз возведя в квадрат, получим: $16y+48=y^2+12y+36$ или $y^2-4y-12=0$. Корни этого уравнения $y_1=-2$, $y_2=6$ входят в ОДЗ исходного уравнения. Однако проверка показывает, что $y_2=6$ исходному уравнению не удовлетворяет, так как не входит в ОСР этого уравнения.

Итак, получаем простейшее логарифмическое решение: $\log_{0,2}(x-1)=-2$, откуда $x-1=0{,}2^{-2}=25$ и $x=26$.

В случае **однородных** уравнений приходится вводить две новые переменные.

Пример 12

Решим уравнение $\log_2^2(10-3x)=3\log_2(10-3x)\log_2(4-x)-2\log_2^2(4-x)$.

ОДЗ уравнения задается условиями $\begin{cases}10-3x>0\\ 4-x>0\end{cases}$, откуда $x<\frac{10}{3}$.

Введем две новые переменные $a=\log_2(10-3x)$ и $b=\log_2(4-x)$ и получим **однородное** уравнение: $a^2=3ab-2b^2$ или $a^2-3ab+2b^2=0$. Решения этого уравнения $a=b$ и $a=2b$. Вернемся к старой переменной. Получаем два уравнения.

а) $\log_2(10-3x)=\log_2(4-x)$, тогда $10-3x=4-x$, откуда $x=3$ (входит в ОДЗ).

б) $\log_2(10-3x)=2\log_2(4-x)$ или $\log_2(10-3x)=\log_2(4-x)^2$, тогда $10-3x=(4-x)^2$ или $0=x^2-5x+6$, откуда $x_1=3$ и $x_2=2$ (оба корня входят в ОДЗ).

Итак, данное уравнение имеет два решения: $x=3$ и $x=2$.

5. Уравнения, решаемые с помощью их специфики

Встречаются задачи, решение которых основано на **свойствах** входящих в них **функций**.

Пример 13

Решим уравнение $\log_3 x + \log_x 3 = 2\cos 4\pi x$.

Рассмотрим функции $y_1 = \log_3 x + \log_x 3$ и $y_2 = 2\cos 4\pi x$ и найдем их области значений. Представим первую функцию в виде $y_1 = \log_3 x + \dfrac{1}{\log_3 x}$. Предположим, что $\log_3 x > 0$, и используем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Получаем: $\dfrac{1}{2}\left(\log_3 x + \dfrac{1}{\log_3 x}\right) \ge \sqrt{\log_3 x \cdot \dfrac{1}{\log_3 x}} = 1$ или $\log_3 x + \dfrac{1}{\log_3 x} \ge 2$, т. е. $y_1 \ge 2$. При этом равенство достигается, если числа равны, т. е. $\log_3 x + \dfrac{1}{\log_3 x}$ или $\log_3^2 x = 1$, откуда $\log_3 x = 1$ и $x = 3$. Аналогично рассматривается случай $\log_3 x < 0$. Можно показать, что $y_1 \le -2$ и равенство достигается при $x = \dfrac{1}{3}$. Получили, что $E(y_1) = (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$.

Область значений второй функции $E(y_2) = [-2; 2]$. Поэтому надо рассмотреть два случая: $\begin{cases} x = 3 \\ \cos 4\pi x = 1 \end{cases}$ (верно) и $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ \cos 4\pi x = -1 \end{cases}$ (не выполняется).

Итак, данное уравнение имеет единственное решение $x = 3$.

Пример 14

Решим уравнение $\log_2 x = \sqrt{8 - x}$.

Исследуем монотонность функций, входящих в уравнение. Функция $y_1 = \log_2 x$ – возрастающая, функция $y = \sqrt{8 - x}$ – убывающая. Очевидно, если данное уравнение имеет корень, то он единственный. Далее этот корень надо подобрать (угадать). Подбором находим $x = 4$.

В ряде случаев встречаются уравнения, **содержащие логарифмы** неизвестных, но **не являющиеся логарифмическими**. Тогда используются специальные приемы, суть которых станет понятна из примеров.

Пример 15

Решим уравнение $3x = x^{\log_3 x^2}$.

Найдем **логарифм** по основанию 3 **от обеих частей** данного **уравнения** и используем свойства логарифмов. Получаем: $\log_3(3x)=\log_3(x^{\log_3 x^2})$, или $\log_3 3+\log_3 x=\log_3 x^2\cdot\log_3 x$, или $1+\log_3 x=2\log_3 x\cdot\log_3 x$, или $1+\log_3 x=2\log_3^2 x$. Введем новую неизвестную $y=\log_3 x$ и получим квадратное уравнение $1+y=2y^2$ или $0=2y^2-y-1$. Его корни $y_1=1$ и $y_2=-\frac{1}{2}$. Вернемся к старой неизвестной x. Имеем два уравнения: $\log_3 x=1$ (корень $x_1=3^1=3$) и $\log_3 x=-\frac{1}{2}$ (тогда $x_2=3^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$).

Пример 16

Решим уравнение $3x^{\log_5 2}+2^{\log_5 x}=64$.

Используя **основное логарифмическое тождество**, запишем основание степени в виде $x=5^{\log_5 x}=(2^{\log_2 5})^{\log_5 x}=2^{\log_2 5\cdot\log_5 x}$. Тогда данное уравнение имеет вид: $3\cdot 2^{\log_2 5\cdot\log_5 x\cdot\log_5 2}+2^{\log_5 x}=64$, или $3\cdot 2^{\log_5 x}+2^{\log_5 x}=64$, или $4\cdot 2^{\log_5 x}=64$. Получаем: $2^{\log_5 x}=16$ и $\log_5 x=4$, откуда $x=5^4=625$.

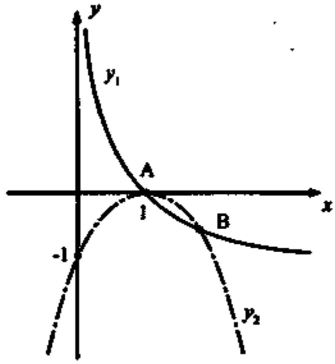
6. Уравнения, решаемые графически

При решении уравнений и исследовании их корней часто используется **графический подход**.

Пример 17

Определим число корней уравнения $\log_{\frac{1}{2}} x=-x^2+2x-1$ и найдем меньший из них.

Запишем уравнение в виде $\log_{\frac{1}{2}} x=-(x-1)^2$ и построим графики функций $y_1=\log_{\frac{1}{2}} x$ (сплошная кривая) и $y_2=-(x-1)^2$ (штрихпунктирная линия). Видно, что графики этих функций пересекаются в точках A и B. Следовательно, уравнение имеет два решения. Абсцисса точки A меньше абсциссы точки B. Поэтому меньший корень уравнения $x=1$.



В заключение заметим, что при решении логарифмических уравнений возможно не только **появление посторонних корней** (что обусловлено **расширением ОДЗ** уравнения при его преобразованиях), но и **потеря решений** (что связано с **сужением ОДЗ**). Если в первом случае **посторонний корень исключается** его **проверкой**, то во втором случае корень может быть **утрачен безвозвратно**.

Пример 18

Решим уравнение $\log_{\frac{x}{2}} x = \log_{2x} 2 - 1$.

ОДЗ уравнения определяется условиями $\begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{x}{2} \neq 1 \\ 2x \neq 1 \end{cases}$, откуда

$x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; 2\right) \cup (2; \infty)$. Перейдем к логарифмам по основанию x.

Получаем: $\dfrac{\log_x x}{\log_x \dfrac{x}{2}} = \dfrac{\log_x 2}{\log_x (2x)} - 1$ или $\dfrac{1}{1 - \log_x 2} = \dfrac{\log_x 2}{\log_x 2 + 1} - 1$. Введем

новую переменную $y = \log_x 2$. Имеем уравнение: $\dfrac{1}{1-y} = \dfrac{y}{y+1} - 1$, или

$y + 1 = y(1-y) - (1-y)(y+1)$, или $y + 1 = y - y^2 - 1 + y^2$, или $1 = -1$ (равенство неверно). Получили, что уравнение решений не имеет. Вместе с тем подстановка значения $x = 1$ показывает, что это корень исходного уравнения. Потеря связана с **сужением ОДЗ** при преобразовании уравнения. Переход к основанию x в логарифмах возможен при $x \neq 1$. Поэтому значение $x = 1$ надо проверять отдельно (например, подстановкой этого значения в исходное уравнение).

Более предпочтительным является переход **к основанию, не зависящему от x**. Например, если перейти к основанию 2, то получим: $\frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{x}{2}} = \frac{\log_2 2}{\log_2(2x)} - 1$ или $\frac{\log_2 x}{\log_2 x - 1} = \frac{1}{1+\log_2 x} - 1$. Введем новую переменную $t = \log_2 x$. Имеем уравнение: $\frac{t}{t-1} = \frac{1}{1+t} - 1$, или $t(1+t) = t - 1 - (t-1)(1+t)$, или $t + t^2 = t - 1 - t^2 + 1$, откуда $t^2 = 0$ или $t = 0$. Получаем $\log_2 x = 0$ и $x = 1$ (**потери корня не происходит**).

Еще раз **предостережем** от формального, бездумного использования формул.

Логарифмические неравенства

При решении простейших логарифмических неравенств $\log_a x \vee b$ необходимо учитывать **монотонность** логарифмической функции $\log_a x$: при $0 < a < 1$ эта функция убывает, при $a > 1$ – возрастает.

Пример 19

Решим неравенство $\log_2(x-13) \le 3$.

ОДЗ неравенства задается условием $x - 13 > 0$. Запишем данное неравенство в виде $\log_2(x-13) \le \log_2 8$. Так как основание логарифмов 2 больше единицы, то логарифмическая функция возрастающая и аргументы логарифмов связаны неравенством того же знака: $x - 13 \le 8$. С учетом ОДЗ получаем, что данное неравенство равносильно двойному линейному неравенству $0 < x - 13 \le 8$, решение которого $x \in (13; 21]$.

Пример 20

Решим неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(3x-2) < \log_{\frac{1}{2}} 7$.

ОДЗ неравенства определяется условием $3x - 2 > 0$. Так как основание логарифмов $\frac{1}{2}$ меньше единицы, то логарифмическая функция убывающая и аргументы логарифмов связаны неравенством противоположного знака, т. е. $3x - 2 > 7$. С учетом ОДЗ получаем, что данное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} 3x-2>0 \\ 3x-2>7 \end{cases}$. Так как второе неравенство более жесткое, чем первое, то полученная система (в свою очередь) равносильна второму неравенству $3x - 2 > 7$, решение которого $x \in (3; \infty)$.

Такие же соображения используются и при решении более сложных неравенств.

Пример 21

Решим неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\frac{3-2x}{1+x}\ge -1$.

Учтем, что основание логарифма $\frac{1}{2}$ меньше единицы, ОДЗ неравенства и $-1=\log_{\frac{1}{2}}2$. Тогда данное неравенство равносильно двойному неравенству $0<\frac{3-2x}{1+x}\le 2$. Запишем это неравенство в виде системы неравенств и решим ее методом интервалов. Получаем:
$\begin{cases}0<\frac{3-2x}{1+x}\\ \frac{3-2x}{1+x}\le 2\end{cases}$, или $\begin{cases}0<\frac{3-2x}{1+x}\\ \frac{3-2x}{1+x}-2\le 0\end{cases}$, или $\begin{cases}0<\frac{3-2x}{1+x}\\ \frac{1-4x}{1+x}\le 0\end{cases}$, откуда

$\begin{cases}x\in\left(-1;\frac{3}{2}\right)\\ x\in(-\infty;-1)\cup\left[\frac{1}{4};\infty\right)\end{cases}$, тогда $x\in\left[\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right)$.

Итак, решение данного неравенства $x\in\left[\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right)$.

Пример 22

Решим неравенство $x^{(\lg x)^2-3\lg x+1}>1000$.

ОДЗ неравенства $x\in(0;+\infty)$. Возьмем от обеих частей неравенства логарифм по основанию 10. При этом знак неравенства не изменится, так как основание логарифма больше 1: $[(\lg x)^2-3\lg x+1]\lg x>3$. Введем замену $y=\lg x$ и придем к неравенству третьей степени: $(y^2-3y+1)y>3$ или $y^3-3y^2+y-3>0$, которое легко решается разложением на множители: $(y-3)(y^2+1)>0$ или $y-3>0$, откуда $y>3$. Получаем простейшее логарифмическое неравенство $\lg x>3$, откуда $x>10^3=1000$. Итак, решение неравенства $x\in(1000;+\infty)$.

В случае если в **основание** показательной или логарифмической функции **входит неизвестная** величина x, то, естественно, необходимо рассмотреть ситуации, когда это **основание принадлежит** промежутку **(0,1)** и когда **принадлежит** промежутку **(1, +∞)**.

Пример 23

Решим неравенство $\log_{x+3}(x^2-x)<1$.

ОДЗ неравенства определяется условиями $\begin{cases} x^2-x>0 \\ x+3>0 \\ x+3\neq 1 \end{cases}$, или

$\begin{cases} x\in(-\infty;\,0)\cup(1;\,+\infty) \\ x\in(-3;\,+\infty) \\ x\neq -2 \end{cases}$, откуда $x\in(-3;\,-2)\cup(-2;\,0)\cup(1;\,+\infty)$.

а) При $0<x+3<1$, т. е. $x\in(-3;\,-2)$, имеем: $\log_{x+3}(x^2-x)<\log_{x+3}(x+3)$, откуда $x^2-x>x+3$, так как при таком основании логарифмическая функция убывающая. Решив это неравенство, найдем: $x\in(-\infty;\,-1)\cup(3;\,+\infty)$. Однако необходимо учесть ограничения на $x\,(x\in(-3;\,-2))$. Тогда получаем: $x\in(-3;\,-2)$.

б) При $x+3>1$, т. е. $x\in(-2;\,+\infty)$ с учетом ОДЗ: $x\in(-2;\,0)\cup(1;\,+\infty)$, имеем: $\log_{x+3}(x^2-x)<\log_{x+3}(x+3)$, откуда $x^2-x<x+3$, так как при основании большем 1 логарифмическая функция возрастающая. Решив это неравенство, найдем: $x\in(-1;\,3)$. С учетом ограничений на x получаем: $x\in(-1;\,0)\cup(1;\,3)$.

Объединяя первый и второй случаи, получаем решение неравенства: $x\in(-3;\,-2)\cup(-1;\,0)\cup(1;\,3)$.

Системы логарифмических уравнений

При решении систем логарифмических уравнений используются **те же приемы**, что и при решении отдельных уравнений. Поэтому остановимся только на некоторых способах решения систем уравнений.

1. Сведение к системе алгебраических уравнений

Пример 24

Решим систему уравнений $\begin{cases} \log_2(3x-y)=1 \\ \log_5(5x+y)=2 \end{cases}$.

Заменим эту систему системой линейных уравнений: $\begin{cases} 3x-y=2^1=2 \\ 5x+y=5^2=25 \end{cases}$. Сложив уравнения, найдем: $8x=27$ или $x=\dfrac{27}{8}$.

Тогда из первого уравнения найдем: $y=3x-2=3\cdot\frac{27}{8}-2=\frac{65}{8}$. Итак, решение системы $\left(\frac{27}{8};\frac{65}{8}\right)$.

Во многих случаях перед тем, как свести систему к системе алгебраических уравнений, приходится выполнить **тождественные преобразования** уравнений системы.

Пример 25

Решим систему уравнений $\begin{cases}\lg\left(x^2+y^2\right)-1=\lg 13\\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=3\lg 2\end{cases}$.

Запишем систему в виде $\begin{cases}\lg\left(x^2+y^2\right)=1+\lg 13=\lg 10+\lg 13=\lg 130\\ \lg\dfrac{x+y}{x-y}=\lg 2^3=\lg 8\end{cases}$, или

$\begin{cases}x^2+y^2=130\\ \dfrac{x+y}{x-y}=8\end{cases}$, или $\begin{cases}x^2+y^2=130\\ 7x=9y\end{cases}$, решая которую найдем: $\begin{cases}x_1=9\\ y_1=7\end{cases}$ и $\begin{cases}x_2=-9\\ y_2=-7\end{cases}$, причем второе решение не удовлетворяет ОДЗ второго исходного уравнения (т. е. не является решением).

2. Подстановка неизвестного из одного из уравнений

Очень распространенный способ решения систем уравнений, при котором одно из неизвестных выражается через другое из наиболее простого уравнения и подставляется в другое. Полученное уравнение с одной неизвестной затем решается.

Пример 26

Решим систему уравнений $\begin{cases}2\log_4(y+1)+\log_2 y=\log_2\left(\dfrac{x}{y}-2\right)\\ 5+\log_2\dfrac{y}{x}=\dfrac{6}{\log_2\dfrac{x}{y}}\end{cases}$

Перейдем в первом уравнении к основанию 2 и получим: $\begin{cases}\log_2(y+1)+\log_2 y=\log_2\left(\dfrac{x}{y}-2\right)\\ 5-\log_2\dfrac{x}{y}=\dfrac{6}{\log_2\dfrac{x}{y}}\end{cases}$. Решим сначала второе уравнение системы, сделав замену $\log_2\frac{x}{y}=z:5-z=\frac{6}{z}$ или $z^2-5z+6=0$, корни которого $z_1=2$, $z_2=3$. Отсюда получаем: $\log_2\frac{x}{y}=2$ и $\log_2\frac{x}{y}=3$, или $\frac{x}{y}=4$ и $\frac{x}{y}=8$, или $x=4y$ и $x=8y$.

Обратимся теперь к первому уравнению системы, которое можно записать в виде $y(y+1)=\frac{x}{y}-2$. В случае $\frac{x}{y}=4$ имеем: $y^2+y-2=0$, т. е. $y_1=1$, $y_2=-2$ (не удовлетворяст ОДЗ) и $x_1=4$. В случае $\frac{x}{y}=8$ получаем: $y^2+y-6=0$, т. е. $y_3=2$, $y_4=-3$ (не удовлетворяет ОДЗ) и $x_3=16$. Итак, решения системы (4, 1); (16, 2).

3. Замена переменных

Замена переменных является одним из **наиболее распространенных способов** решения уравнений, неравенств, систем уравнений.

Пример 27

Решим систему уравнений $\begin{cases}2\log_4 x+\log_2(y-1)=1\\ \log_8 x\cdot\log_{\sqrt{2}}(y-1)=-\frac{4}{3}\end{cases}$.

Очевидно, что ОДЗ системы уравнений $x>0$ и $y>1$. Перейдем в логарифмах к основанию 2 и получим: $\begin{cases}\log_2 x+\log_2(y-1)=1\\ \log_2 x\cdot\log_2(y-1)=-2\end{cases}$. Введем новые переменные $a=\log_2 x$ и $b=\log_2(y-1)$. Тогда имеем систему алгебраических симметричных уравнений $\begin{cases}a+b=1\\ ab=-2\end{cases}$. Такая система имеет решения (−1; 2) и (2; −1). Вернемся к старым неизвестным x, y и получим две простейшие системы.

а) $\begin{cases}\log_2 x=-1\\ \log_2(y-1)=2\end{cases}$, тогда $\begin{cases}x=2^{-1}=\frac{1}{2}\\ y-1=2^2=4\end{cases}$ и $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=5\end{cases}$.

б) $\begin{cases}\log_2 x=2\\ \log_2(y-1)=-1\end{cases}$, тогда $\begin{cases}x=2^2=4\\ y-1=2^{-1}=\frac{1}{2}\end{cases}$ и $\begin{cases}x=4\\ y=\frac{3}{2}\end{cases}$.

Итак, данная система имеет два решения: $\left(\frac{1}{2}; 5\right)$ и $\left(4; \frac{3}{2}\right)$.

IV. Задание на уроках

№ 512 (а); 514 (б); 515 (в); 517 (а, б); 518 (в); 519 (б); 520 (а); 521 (б); 522 (б); 523 (г); 524 (в); 525 (а, б); 527 (а); 528 (а, г); 529 (б, в); 530 (а, б).

V. Задание на дом

№ 512 (б); 514 (в); 515 (б); 517 (в, г); 518 (а); 519 (г); 520 (в); 521 (г); 522 (г); 523 (б); 524 (г); 525 (в, г); 527 (в); 528 (б, в); 529 (а, г); 530 (в, г).

VI. Творческие задания

1. Решите логарифмические уравнения:

а) $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$;

б) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;

в) $x^{\lg^3 x - 5\lg x} = 0{,}0001$;

г) $x^{\frac{\lg x + 5}{3}} = 10^{5+\lg x}$;

д) $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + 0{,}5$;

е) $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2$;

ж) $\log_{3x+7}(5x+3) + \log_{5x+3}(3x+7) = 2$;

з) $\log_{x+1}(x-0{,}5) = \log_{x-0{,}5}(x+1)$;

и) $\sqrt{1+\log_x \sqrt{27}} \cdot \log_3 x + 1 = 0$;

к) $\sqrt{8\log_4 x - 2} + \sqrt{1+\log_2 x} = 4$;

л) $\log_5(\cos x - \sin x) = \log_5 \frac{1}{2} - \log_5(\cos x + \sin x)$;

м) $1 + \log_3(5\cos^2 x - 3\cos x - 1) = \log_3(1 - 2\cos x)$;

н) $9\log_{\sin 2x}(4\cos^2 x) + 8\log_{2\cos x}(\sin x) = 16$;

о) $\log_2 \sin x + \log_2 \cos x + \log_2 \operatorname{tg} x = -1$;

п) $\log_2(15\sin^2 x + 7\sin x) = 1 + \log_2(3\sin x + 1)$.

Ответы: а) $\frac{1}{9}$; 9; б) 64; в) 10^{-2}; 10^{-1}; 10; 100; г) 10^{-5}; 10^3; д) 2; е) $\sqrt{3}$; 3; ж) 2; з) 1; и) $\frac{1}{9}$; к) 8; л) $\frac{\pi}{12} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{12} + 2\pi k$; $n, k \in Z$;

м) $\pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi n,\ n\in Z$; н) $\arccos(\sqrt{2}-1)+2\pi n,\ n\in Z$; о) $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$;

п) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

2. Решите логарифмические неравенства:

а) $\dfrac{4x^2-1}{\log_{1,7}\left(\frac{1}{2}(1-\log_7 3)\right)}\le 0$; б) $\dfrac{\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)}{(x-8)(2-x)}>0$;

в) $\dfrac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}(x^2+4)}<0$; г) $\dfrac{\log_5(x^2+3)}{4x^2-16x}<0$;

д) $0{,}3^{\log_{\frac{1}{7}}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}}>1$; е) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,2x}(x^2-6x+8)}\le 2{,}5$;

ж) $\dfrac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)}>\dfrac{1}{2}$; з) $\dfrac{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}-1)}{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}+5)}<\dfrac{1}{2}$;

и) $\dfrac{\lg^2 x-3\lg x+3}{\lg x-1}\le 1$; к) $\dfrac{\log_{0,5}^2 x-6\log_{0,5}x+6}{\log_{0,5}x-1}>-2$;

л) $\log_x(x+1)<\log_{\frac{1}{x}}(2-x)$; м) $\log_x\dfrac{8-12x}{x-6}>5$;

н) $\log_2\sin x+1\le 0$; о) $\log_{\frac{1}{2}}\cos x-\dfrac{1}{2}\ge 0$;

п) $\log_{2\cos x}(2\sin x)<0$; р) $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x}(\operatorname{tg}x)\ge 0$.

Ответы: а) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};\infty\right)$; б) $(-\infty;2)\cup(8;\infty)$; в) $\left(-\infty;\frac{7}{3}\right)\cup(3;8)$;

г) $(0;4)$; д) $\left(-\frac{1}{2};2\right)$; е) $[1;4]$; ж) $(5;\infty)$; з) $(-2;13)$; и) $(0;10)\cup\{100\}$;

к) $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$; л) $(0;1)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\infty\right)$; м) $\left(\frac{2}{3};1\right)\cup(2;6)$;

н) $\left(2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)$;

о) $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;-\frac{\pi}{4}+2\pi n\right]$;

п) $\left(2\pi n; \dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi n; \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)$;

р) $\left(2\pi n; \dfrac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi n; \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

3. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}\log_x y+\log_y x=2\\ x^2-y=20\end{cases}$; б) $\begin{cases}\log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9\\ x+y=20\end{cases}$;

в) $\begin{cases}\lg\left(x^2+y^2\right)=2\\ \log_2 x-4=\log_2 3-\log_2 y\end{cases}$; г) $\begin{cases}\lg\left(x^2+y^2\right)=2-\lg 5\\ \lg(x+y)+\lg(x-y)=\lg 1{,}2+1\end{cases}$;

д) $\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y=4\\ \log_4 x+\log_2 y=5\end{cases}$; е) $\begin{cases}4^{-y}\cdot\log_2 x=4\\ \log_2 x+2^{-2y}=4\end{cases}$;

ж) $\begin{cases}y+\lg x=1\\ x^y=0{,}01\end{cases}$; з) $\begin{cases}x^{\lg y}=2\\ xy=20\end{cases}$;

и) $\begin{cases}\log_2^2 x+1=\log_2\left(y^2\right)\\ \log_2 x\ge\log_2 y\end{cases}$; к) $\begin{cases}4\log_2^2 x+1=2\log_2 y\\ \log_2\left(x^2\right)\ge\log_2 y\end{cases}$.

Ответы: а) (5; 5); б) (2; 18), (18; 2); в) (6; 8), (8; 6); г) (4; 2), (4; −2); д) (4; 16); е) $\left(4; -\dfrac{1}{2}\right)$; ж) (100; 1), $\left(\dfrac{1}{10}; 2\right)$; з) (2; 10), (10; 2); и) (2; 2); к) $(\sqrt{2}; 2)$.

VII. Подведение итогов уроков

Урок 54. Понятие об обратной функции

Цель: рассмотреть обратную функцию и ее свойства.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Решите уравнение $x^{3\log_2 x+1}=16$.
2. Решите неравенство $\log_{0,4}\dfrac{3x+1}{x-2}\ge 1$.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\log_5\left(x^2+y^2\right)=2\\ \log_4 x=1+\log_4 5-\log_4 y\end{cases}$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $x^{4\log_3 x-2}=9$.
2. Решите неравенство $\log_{0,4}\dfrac{3x-1}{x+2}\ge 1$.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\log_{13}\left(x^2+y^2\right)=2\\ \log_5 x=\log_5 y+1-\log_5 12\end{cases}$.

III. Изучение нового материала

С обратными функциями уже приходилось встречаться, например функция $y=\arcsin x$ обратная для функции $y=\sin x$, функция $y=\sqrt[n]{x}$ обратная для функции $y=x^n$, функция $y=\log_a x$ обратная для функции $y=a^x$ и т. д. Однако само **понятие обратной функции** ранее **не вводилось**. Пора с таким понятием разобраться.

При исследовании различных функций и построении их графиков часто по данному **значению аргумента** x_0 **вычислялось** соответствующее **значение** y_0 **функции** $y=f(x)$. Также достаточно часто приходится решать **обратную задачу: найти значение аргумента** x_0, при которых **функция** $y=f(x)$ **принимает данное значение** y_0. Именно такая задача возникает, например, при решении уравнений.

Пример 1

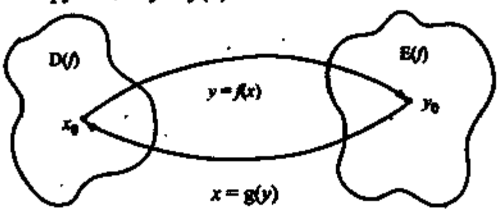
Пусть дана линейная функция $y=3x+5$. Чтобы найти значение аргумента x_0, при котором функция принимает значение y_0, надо решить уравнение $y_0=3x-5$. Находим, что при любом y_0, это уравнение имеет единственное решение: $x=\dfrac{y_0-5}{3}$.

Пример 2

Для функции $y=x^4$ уравнение $y_0=x^4$ имеет два решения: $x_1=\sqrt[4]{y_0}$ и $x_2=-\sqrt[4]{y_0}$ при $y_0>0$ (при $y_0=0$ решение одно: $x_0=0$).

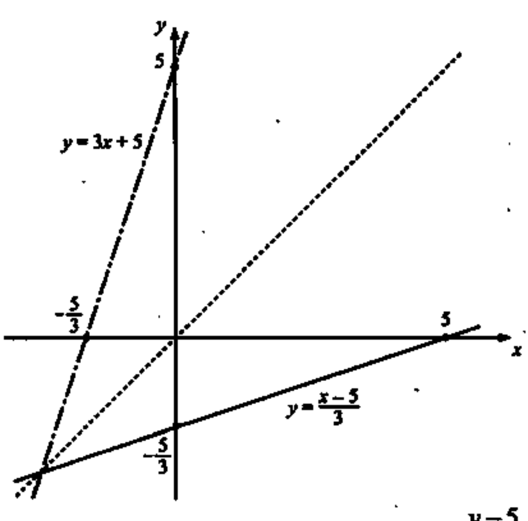
Функцию, принимающую **каждое** свое **значение** y_0 **при единственном значении аргумента** x_0 области определения, называют **обратимой**. В примере 1 рассматривалась обратимая функция, в примере 2 – нет. Из определения обратимой функции следует, что если **функция $f(x)$ обратима и число a принадлежит области значений $E(f)$, то уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение.**

Теперь разберемся с понятием обратной функции. Пусть $f(x)$ – некоторая обратимая функция. Для любого числа y_0 из ее области значений $E(f)$ имеется единственное значение x_0 из области определения $D(f)$ такое, что $f(x_0) = y_0$. Подставив каждому y_0 в соответствие такое x_0, получим новую функцию $g(y)$ с областью определения $E(f)$ и область значений $D(f)$. Так как принято аргумент обозначать буквой x, а функцию – буквой y, то получаем функцию $y = g(x)$, которая является **обратной** к функции $y = f(x)$.



Пример 3

Еще раз вернемся к примеру 1. Было показано, что функция $x = \dfrac{y-5}{3}$ является обратной к функции $y = 3x + 5$.



Очевидно, что графики функций $y = 3x + 5$ и $x = \dfrac{y-5}{3}$ совпадают, так как это одна и та же связь между переменными x и y.

Теперь обозначим аргумент обратной функции буквой x, значение функции – буквой y (как принято). Тогда обратная функции имеет вид $y=\dfrac{x-5}{3}$. Из рисунка видно: графики функций $y=3x+5$ и $y=\dfrac{x-5}{3}$ симметричны относительно прямой $y=x$. Это утверждение справедливо и в общем случае.

Пример 4

Найдем функцию, обратную к функции $f(x)=\sqrt[3]{7x^5-2}$.

Рассмотрим соотношение $y=\sqrt[3]{7x^5-2}$ и выразим из него переменную x. Получаем: $y^3=7x^5-2$, тогда $x^5=\dfrac{y^3+2}{7}$ и $x=\sqrt[5]{\dfrac{y^3+2}{7}}$.

Сделаем переобозначение переменных $x \rightleftarrows y$, имеем: $y=\sqrt[5]{\dfrac{x^3+2}{7}}$.

Поэтому функция $g(x)=\sqrt[5]{\dfrac{x^3+2}{7}}$ обратная к функции $f(x)=\sqrt[3]{7x^5-2}$.

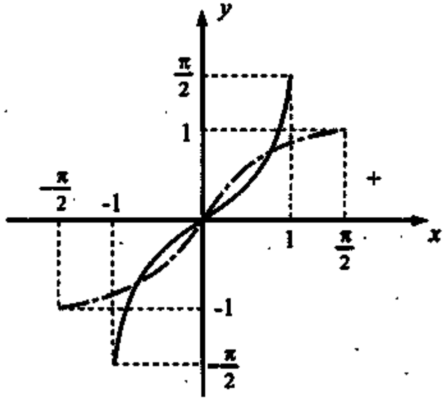
Если функция $g(x)$ обратная к функции $f(x)$, то функция $g(x)$ обратима и обратной к ней является функция $f(x)$. Поэтому функции $f(x)$ и $g(x)$ **взаимно обратные**. Для взаимно обратных функций справедливы **утверждения**:

1) **Графики** таких функций **симметричны относительно** прямой $y=x$.

2) Эти функции имеют **одинаковую монотонность**, т. е. обе возрастают или обе убывают.

Пример 5

Рассмотрим функцию $f(x)=\sin x$. На области определения $x\in(-\infty;\infty)$ эта функция не монотонна. На промежутке $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ функция $f(x)=\sin x$ возрастает и поэтому обратима. Обратной к ней является функция $g(x)=\arcsin x$. Тогда функции $f(x)=\sin x$ (штрих-пунктирная линия) и $g(x)=\arcsin x$ (сплошная кривая) являются взаимно обратными. Обе эти функции возрастающие, и их графики симметричны относительно прямой $y=x$.



Разумеется, недавно изученные функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ также являются взаимно обратными. При этом графики таких функций симметричны относительно прямой $y = x$ и обе являются или убывающими (при $0 < a < 1$) или возрастающими ($a > 1$).

IV. Задание на уроке

№ 531 (а, г); 532 (б, в); 533 (а, б); 534 (а, в); 535 (а, в); 536 (б).

V. Контрольные вопросы

1. На примере поясните понятие обратной функции.
2. Какие функции называются взаимно обратными?
3. Перечислите свойства взаимно обратных функций.

VI. Задание на дом

№ 531 (б, в); 532 (а, г); 533 (в, г); 534 (б, г); 535 (б, г); 536 (в, г).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 55–56. Контрольная работа по теме «Показательная и логарифмическая функции»

Цель: проверить знания учащихся, используя разноуровневые варианты.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее и варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит шесть задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $27^{\log_3 2}+\log_{18} 2+2\log_{18} 3$.
2. Найдите функцию, обратную к функции $f(x)=5x+3$.
3. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{3^{7x-2}-9}$.
4. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(4x+3)\geq -2$.
5. Решите уравнение $3^{x+3}-2\cdot 3^{x+1}-3^{x}=180$.
6. Решите систему уравнений $\begin{cases}2\log_3(x-1)+3\log_2 y=7\\5\log_3(x-1)+\log_2 y=11\end{cases}$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $8^{\log_2 3}+2\log_{12} 2+\log_{12} 3$.
2. Найдите функцию, обратную к функции $f(x)=6x-5$.
3. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{2^{4x-3}-16}$.
4. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(7x-4)\geq -1$.
5. Решите уравнение $2^{x-1}-3\cdot 2^{x}+7\cdot 2^{x+1}=92$.
6. Решите систему уравнений $\begin{cases}3\log_2 x+4\log_3(y+1)=11\\4\log_2 x+\log_3(y+1)=6\end{cases}$.

Вариант 3

1. Найдите значение выражения $\log_3^2 \sqrt{3} + \log_8 \log_{13} 169$.

2. Найдите функцию, обратную к функции $f(x) = 3^{7x-2}$.

3. Найдите область определения функции

$f(x) = 7\sqrt{\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3}$.

4. Решите неравенство $\log_{0,2}(4^x + 12) \le \log_{0,2}(7 \cdot 2^x)$.

5. Решите уравнение $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4 \end{cases}$.

Вариант 4

1. Найдите значение выражения $\log_2^3 \sqrt{2} + \log_4 \log_{14} 196$.

2. Найдите функцию, обратную к функции $f(x) = 5^{4x+3}$.

3. Найдите область определения функции

$f(x) = 7\sqrt{\log_3^2 x - \log_3 x - 2}$.

4. Решите неравенство $\log_{0,7}(9^x + 18) \le \log_{0,7}(11 \cdot 3^x)$.

5. Решите уравнение $2^{\sin^2 x} + 5 \cdot 2^{\cos^2 x} = 7$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2 \end{cases}$.

Вариант 5

1. Найдите lg56, если $\lg 2 = a$ и $\log_2 7 = b$.

2. Найдите функцию, обратную к функции $f(x) = 7\log_2(3x - 1)$.

3. Найдите области определения и значений функции

$f(x) = \sqrt{2^{2x} - 2^{x+3} + 15}$.

4. Решите неравенство $\lg \sin x \ge \lg \cos x + \lg 2$.

5. Решите уравнение $\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)^x = 10$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^{\cos x} + 2^{\frac{1}{\cos y}} = 5 \\ 2^{\cos x + \frac{1}{\cos y}} = 4 \end{cases}$.

Вариант 6

1. Найдите $\log_{30} 8$, если $\lg 5 = a$ и $\lg 3 = b$.

2. Найдите функцию, обратную к функции $f(x)=8\log_3(2x-3)$.

3. Найдите области определения и значений функции $f(x)=\sqrt{3^{2x}-3^{x+2}+20}$.

4. Решите неравенство $\log_2 \sin x+\log_2 \cos x\le -2$.

5. Решите уравнение $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=14$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} 9^{2\operatorname{tg} x+\cos y}=3 \\ 9^{\cos y}-81^{\operatorname{tg} x}=2 \end{cases}$.

Урок 57. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы; рассмотреть наиболее типичные ошибки; разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
−	1				
Ø	1				

Обозначения:

\+ − число решивших задачу правильно или почти правильно;

± − число решивших задачу со значительными ошибками;

− − число не решивших задачу;

Ø − число не решавших задачу. Вариант 1, 2 − 8 учеников.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: 9.

2. *Ответ*: $y=\dfrac{x-3}{5}$.

3. *Ответ*: $\left[\dfrac{4}{7};\infty\right)$.

4. *Ответ*: $\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4}\right]$.

5. *Ответ*: 2.

6. *Ответ*: (10; 2).

Вариант 2

1. *Ответ*: 28.

2. *Ответ*: $y=\dfrac{x+5}{6}$.

3. *Ответ*: $\left[\dfrac{7}{4};\infty\right)$.

4. *Ответ*: $\left(\dfrac{4}{7};1\right]$.

5. *Ответ*: 3.

6. *Ответ*: (2; 8).

Вариант 3

1. *Ответ*: $\dfrac{7}{12}$.

2. *Ответ*: $y=\dfrac{2+\log_3 x}{7}$.

3. *Ответ*: $(0;2]\cup[8;\infty)$.

4. *Ответ*: $(-\infty;\log_2 3]\cup[2;\infty)$.

5. *Ответ*: $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}n,\ n\in Z$.

6. *Ответ*: (2; 6).

Вариант 4

1. *Ответ*: $\dfrac{5}{8}$.

2. *Ответ*: $y=\frac{\log_5 x-3}{4}$.

3. *Ответ*: $\left(0;\frac{1}{3}\right]\cup[9;\infty)$.

4. *Ответ*: $(-\infty;\log_3 2]\cup[2;\infty)$.

5. *Ответ*: $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

6. *Ответ*: (5; 3).

Вариант 5

1. Перейдем в $\log_2 7=b$ к основанию 10 и получим $\frac{\lg 7}{\lg 2}=b$, откуда $\lg 7=b\cdot\lg 2=ba$. Теперь вычислим: $\lg 56=\lg(7\cdot 8)=\lg 7+\lg 8=$ $=\lg 7+3\lg 2=ab+3a$.

Ответ: $ab+3a$.

2. Из равенства $y=7\log_2(3x-1)$ выразим переменную x и получим: $\frac{y}{7}=\log_2(3x-1)$, или $2^{\frac{y}{7}}=3x-1$, или $x=\frac{1}{3}\left(2^{\frac{y}{7}}+1\right)$. Введем привычные обозначения: буквой x обозначим аргумент, буквой y – функцию. В результате получаем функцию, обратную к данной: $y=\frac{1}{3}\left(2^{\frac{x}{7}}+1\right)$.

Ответ: $y=\frac{1}{3}\left(2^{\frac{x}{7}}+1\right)$.

3. Область определения функции задается условием $2^{2x}-2^{x+3}+15\geq 0$. Введем переменную $t=2^x>0$ и получим квадратное неравенство $t^2-8t+15\geq 0$. Его решение $t\in(0;3]\cup[5;\infty)$. Вернемся к переменной x и учтем, что функция $t=2^x$ возрастающая. Получаем: $D(f)=(-\infty;\log_2 3]\cup[\log_2 5;\infty)$ – область определения функции. Область значений функции $E(f)=[0;\infty)$.

Ответ: $D(f)=(-\infty;\log_2 3]\cup[\log_2 5;\infty)$; $E(f)=[0;\infty)$.

4. Учтем, что $\sin x>0$, $\cos x>0$, и запишем неравенство в виде: $\lg\sin x-\lg\cos x\geq\lg 2$, или $\lg\frac{\sin x}{\cos x}\geq\lg 2$, или $\operatorname{tg} x\geq 2$. С учетом

ограничений выпишем решение этого неравенства: $x \in \left[\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n \in Z$.

Ответ: $\left[\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n \in Z$.

5. Учтем, что $\sqrt{5+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{5^2-(2\sqrt{6})^2} = 1$. Тогда $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$ и $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = \frac{1}{\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x}$. Введем новую переменную $t = (\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x = (5+2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} > 0$ и получим рациональное уравнение $t + \frac{1}{t} = 10$ или $t^2 - 10t + 1 = 0$. Его корни $t_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6} > 0$. Вернемся к старой переменной. Имеем два уравнения: $(5+2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} = 5+2\sqrt{6}$ (его корень $x = 2$) и $(5+2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} = 5-2\sqrt{6}$ (корень $x = -2$).

Ответ: 2; –2.

6. Запишем систему уравнений в виде $\begin{cases} 2^{\cos x} + 2^{\frac{1}{\cos y}} = 5 \\ 2^{\cos x} \cdot 2^{\frac{1}{\cos y}} = 4 \end{cases}$ и введем новые переменные $a = 2^{\cos x}$ и $b = 2^{\frac{1}{\cos y}}$. Получаем систему уравнений $\begin{cases} a + b = 5 \\ a \cdot b = 4 \end{cases}$. Решения этой системы $a = 1$, $b = 4$ и $a = 4$, $b = 1$. Вернемся к старым переменным. Имеем две системы уравнений.

а) $\begin{cases} 2^{\cos x} = 1 \\ 2^{\frac{1}{\cos y}} = 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$, где $n, k \in Z$.

б) $\begin{cases} 2^{\cos x} = 4 \\ 2^{\frac{1}{\cos y}} = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \cos x = 2 \\ \frac{1}{\cos y} = 0 \end{cases}$. Эта система решений не имеет.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, где $n, k \in Z$.

Вариант 6

1. Найдем $\lg 2 = \lg\frac{10}{5} = \lg 10 - \lg 5 = 1 - a$. Перейдем в $\log_{30}8$ к основанию 10 и получим: $\log_{30} 8 = \frac{\lg 8}{\lg 30} = \frac{\lg 2^3}{\lg(10\cdot 3)} = \frac{3\lg 2}{\lg 10 + \lg 3} = \frac{3(1-a)}{1+b}$.

Ответ: $\frac{3(1-a)}{1+b}$.

2. Из равенства $y = 8\log_3(2x-3)$ выразим переменную x и получим: $\frac{y}{8} = \log_3(2x-3)$, или $3^{\frac{y}{8}} = 2x-3$, или $x = \frac{1}{2}\left(3^{\frac{y}{8}} + 3\right)$. Введем привычные обозначения: буквой x обозначим аргумент, буквой y – функцию. В результате получаем функцию, обратную к данной: $y = \frac{1}{2}\left(3^{\frac{x}{8}} + 3\right)$.

Ответ: $y = \frac{1}{2}\left(3^{\frac{x}{8}} + 3\right)$.

3. Область определения функции задается условием $3^{2x} - 3^{x+2} + 20 \geq 0$. Введем переменную $t = 3^x > 0$ и получим: $t^2 - 9t + 20 \geq 0$. Решение этого неравенства $t \in (0;\ 4] \cup [5;\ \infty)$. Вернемся к переменной x и учтем, что функция $t = 3^x$ возрастающая. Получаем: $D(f) = (-\infty;\ \log_3 4] \cup [\log_3 5;\ \infty)$ – область определения функции. Область значений функции $E(f) = [0;\ \infty)$.

Ответ: $D(f) = (-\infty;\ \log_3 4] \cup [\log_3 5;\ \infty)$; $E(f) = [0;\ \infty)$.

4. Учтем, что $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, и запишем неравенство в виде: $\log_2(\sin x \cdot \cos x) \leq \log_2\frac{1}{4}$, или $\sin x \cdot \cos x \leq \frac{1}{4}$, или $\sin 2x \leq \frac{1}{2}$. С учетом ограничений выпишем решение этого неравенства: $x \in \left(2\pi n;\ \frac{\pi}{12} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{5\pi}{12} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n \in Z$.

Ответ: $\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{12} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{5\pi}{12} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n \in Z$.

5. Учтем, что $\sqrt{7+\sqrt{48}} \cdot \sqrt{7-\sqrt{48}} = \sqrt{7^2 - (\sqrt{48})^2} = 1$. Тогда $\sqrt{7-\sqrt{48}} = \frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{48}}}$ и $(\sqrt{7-\sqrt{48}})^x = \frac{1}{(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x}$. Введем новую

переменную $t=(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x=(7+\sqrt{48})^{\frac{x}{2}}>0$ и получим рациональное уравнение $t+\frac{1}{t}=14$ или $t^2-14t+1=0$. Его корни $t_{1,2}=7\pm\sqrt{48}>0$. Вернемся к старой переменной. Имеем два уравнения: $(7+\sqrt{48})^{\frac{x}{2}}=7+\sqrt{48}$ (его корень $x=2$) и $(7+\sqrt{48})^{\frac{x}{2}}=7-\sqrt{48}$ (корень $x=-2$).

Ответ: 2; −2.

6. Запишем систему уравнений в виде $\begin{cases}81^{\operatorname{tg}x}\cdot 9^{\cos y}=3\\ 9^{\cos y}-81^{\operatorname{tg}x}=2\end{cases}$ и введем новые переменные $a=9^{\cos y}$ и $b=81^{\operatorname{tg}x}$. Получаем систему уравнений $\begin{cases}ab=3\\ a-b=2\end{cases}$. Решения этой системы $a=3$, $b=1$ и $a=-1$, $b=-3$ (не подходит, т. к. $a, b>0$). Вернемся к старым переменным. Имеем систему уравнений $\begin{cases}9^{\cos y}=3\\ 81^{\operatorname{tg}x}=1\end{cases}$ или $\begin{cases}\cos y=\frac{1}{2}\\ \operatorname{tg}x=0\end{cases}$, откуда $\begin{cases}y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\\ x=\pi k\end{cases}$, где $n, k\in Z$.

Ответ: $\left(\pi k;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, где $n, k\in Z$.

§ 11. Производная и первообразная показательной и логарифмической функций

Уроки 58–60. Производная показательной функции. Число e

Цели: дать представление о числе e; получить формулы для производной и первообразной показательной функции.

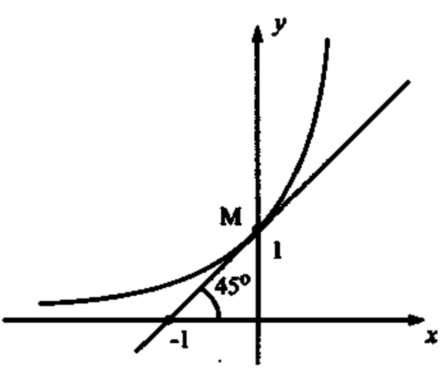
Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Изучение нового материала

Графики показательной функции изображались гладкими линиями, к которым в каждой точке можно провести касательную. Существование касательной к графику функции $y = a^x$ в точке x_0 означат ее дифференцируемость в этой точке. Поэтому показательная функция **дифференцируема в каждой точке** области определения.

Будем строить графики показательной функции $y = a^x$ для различных оснований a и касательные к ним в точке $M(0;1)$. Эти касательные образуют различные углы с осью абсцисс. В курсе математического анализа доказывается, что при определенном значении $a \in (2; 3)$ такая касательная образует угол **45°** с осью Ox. При этом **угловой коэффициент** такой **касательной** (или **производная функции** $y = a^x$ **при** $x = 0$) **равен** 1. Это число a обозначают буквой e. Доказано, что **число e иррациональное** (поэтому записывается в виде бесконечной десятичной непериодической дроби) и приближенно равно $e \approx 2{,}718\ldots$. Функцию $y = e^x$ называют **экспонентой**.



Итак, существует такое **число** e ($e \approx 2{,}718$), что показательная **функция $y = e^x$ в точке $x = 0$ имеет производную, равную 1**, т. е. $\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} \to 1$ при $\Delta x \to 0$.

Сначала найдем формулу **для производной экспоненты.**

Теорема 1. Функция $y = e^x$ дифференцируема в каждой точке области определения и $(e^x)' = e^x$. Докажем это. Найдем приращение функции $y = e^x$ в точке x_0. Получаем: $\Delta y = y(x_0+\Delta x) - y(x_0) = e^{x_0+\Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0}\cdot e^{\Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0}(e^{\Delta x}-1)$. Вычислим отношение приращения функции к приращению аргумента $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x_0}(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = e^{x_0}\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} \to e^{x_0}\cdot 1 = e^{x_0}$ при $\Delta x \to 0$. Тогда по определению производной получаем: $y' = e^x$ или $(e^x)' = e^x$ при любом x.

Пример 1

Найдем производные функций: а) $y = e^{-3x}$; б) $y = e^{\operatorname{tg} x}$.

Данные функции являются сложными. Поэтому используем правило дифференцирования сложной функции и таблицу производных. Получаем:

а) $(e^{-3x})' = e^{-3x}\cdot(-3x)' = -3e^{-3x}$;

б) $(e^{\operatorname{tg} x})' = e^{\operatorname{tg} x}\cdot(\operatorname{tg} x)' = e^{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$.

При вычислениях часто используются логарифмы по основанию e. Так как число e положительно и не равно 1, то такие логарифмы определены. Напомним, что подобные логарифмы (**по основанию e**) называются **натуральными** и обозначаются символом ln, т. е. $\ln x = \log_e x$.

Пример 2

Вычислим $\ln\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}$.

Сначала преобразуем логарифмируемую величину, используя понятие рационального показателя степени. Получаем: $\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}} = \left(e\left(e\cdot e^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$=\left(e\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(e\cdot e^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(e^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{7}{8}}$. Теперь легко вычислить и сам логарифм: $\ln\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}=\ln e^{\frac{7}{8}}=\frac{7}{8}$.

Получим формулу для производной показательной функции $y=a^x$ при произвольном значении a ($a>0$, $a\neq 1$).

Теорема 2. Показательная функция $y=a^x$ **дифференцируема в каждой точке области определения и** $(a^x)'=a^x\ln a$.

Докажем это. Используя основное логарифмическое тождество, запишем функцию в виде $y=a^x=(e^{\ln a})^x=e^{x\ln a}$. Такая функция является сложной. По теореме о производной сложной функции показательная функция дифференцируема в каждой точке и $(a^x)'=(e^{x\ln a})'=e^{x\ln a}\cdot(x\ln a)'=a^x\ln a$. ▬

Разумеется, показательная функция **непрерывна** в каждой точке области определения, т. е. $a^x\to a^{x_0}$ при $x\to x_0$.

Пример 3

Найдем производные функций: а) $y=3^x$; б) $y=2^{3x-x^2}$; в) $y=5^{\operatorname{tg}x-\cos x}$.

а) Используя полученную формулу, сразу имеем: $(3^x)'=3^x\ln 3$.

б) По правилу вычисления производной сложной функции получаем: $(2^{3x-x^2})=2^{3x-x^2}\cdot(3x-x^2)'\ln 2=2^{3x-x^2}\cdot(3-2x)\ln 2$.

в) Аналогично предыдущему пункту имеем: $(5^{\operatorname{tg}x-\cos x})'=$

$=5^{\operatorname{tg}x-\cos x}\cdot(\operatorname{tg}x-\cos x)'\ln 5=5^{\operatorname{tg}x-\cos x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\sin x\right)\ln 5.$

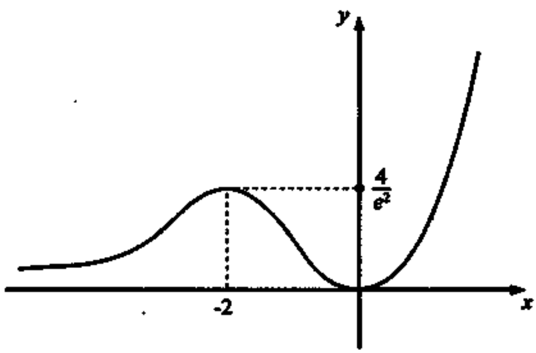
При изучении производной показательной функции возникают задачи, с которыми вы встречались в 10 классе: исследование функции и построение ее графика, уравнение касательной к графику функции, прикладные задачи и т. д. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4

Построим график функции $y=x^2\cdot e^x$.

Область определения этой функции – все действительные числа, т. е. $x\in R$. При $x\neq 0$ функция принимает положительные значения $y>0$, при $x=0$ значение функции $y=0$. Найдем производную функции, используя правило дифференцирования произведения функций: $y'=(x^2e^x)'=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'=2xe^x+x^2e^x=xe^x(2+x)$.

Так как при всех значениях x величина $e^x > 0$, то производная обращается в 0 в двух точках: $x = 0$ и $x = -2$. Отметим эти точки на координатной оси и проставим знаки производной в трех интервалах. Видно, что при $x = -2$ функция имеет максимум: $y_{max} = (-2)^2 e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}5$, при $x = 0$ – минимум: $y_{min} = 0^2 e^0 = 0$. Теперь легко построить график данной функции.



Пример 5

При всех значениях параметра a определим число решений уравнения $x^2 e^x = a$.

Воспользуемся результатами предыдущей задачи. Для этого в одной системе координат надо построить графики двух функций $y_1 = x^2 e^x$ (уже построен) и $y_2 = a$ (прямая параллельная оси абсцисс). Тогда очевидно, что при $a \in (-\infty; 0)$ уравнение решений не имеет (0 решений), при $a \in \{0\} \cup \left(\frac{4}{e^2}; \infty\right)$ имеется только одно решение, при $a \in \left(0; \frac{4}{e^2}\right)$ существует 3 решения и при $a = \frac{4}{e^2}$ – 2 решения.

Пример 6

Напишем уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x^2 e^x$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

Воспользуемся результатами примера 4 и вычислим значение производной $f'(x)$ и самой функции $f(x)$ в точке $x_0 = -1$. Получаем:

$f'(-1)=-1\cdot e^{-1}\cdot(2-1)=-\dfrac{1}{e}$ и $f(-1)=(-1)^2e^{-1}=\dfrac{1}{e}$. Подставим эти величины в уравнение касательной $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Тогда имеем: $y=-\dfrac{1}{e}(x+1)+\dfrac{1}{e}$ или $y=-\dfrac{x}{e}$.

Разберемся теперь с **первообразной показательной функции.**

Теорема 3. Первообразной для функции $f(x)=a^x$ на множестве R является функция $F(x)=\dfrac{a^x}{\ln a}$.

По определению первообразной найдем производную $F'(x)=\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)'=\dfrac{1}{\ln a}\cdot(a^x)'=\dfrac{1}{\ln a}\cdot a^x\cdot\ln a=f(x)$ при всех x. Так как выполнено **равенство** $F'(x)=f(x)$, то **функция** $F(x)=\dfrac{a^x}{\ln a}$ **является первообразной для функции** $f(x)=a^x$. В частности, для функции $f(x)=e^x$ первообразной является функция $F(x)=e^x$.

Пример 7

Найдем первообразные для функций: а) $f(x)=3\cdot 2^x$; б) $f(x)=7\cdot 3^{4x+1}$; в) $f(x)=\dfrac{2^{x+3}-6^x}{12^x}$.

а) Используем теорему 3 и сразу найдем: $F(x)=3\cdot\dfrac{2^x}{\ln 2}+C=$ $=\dfrac{3\cdot 2^x}{\ln 2}+C.$

б) Дополнительно используем правила интегрирования сложной функции. Получаем: $f(x)=7\cdot\dfrac{3^{4x+1}}{4\cdot\ln 3}+C=\dfrac{7\cdot 3^{4x+1}}{4\ln 3}+C$.

в) Запишем сначала функцию $f(x)$ в более удобном виде: $f(x)=\dfrac{2^{x+3}-6^x}{12^x}=$ $=\dfrac{2^3\cdot 2^x-6^x}{2^x\cdot 6^x}=8\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. Теперь найдем первообразную этой функции: $F(x)=8\cdot\dfrac{\left(\frac{1}{6}\right)^x}{\ln\frac{1}{6}}-\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}}+C=-\dfrac{8}{\ln 6\cdot 6^x}+\dfrac{1}{\ln 2\cdot 2^x}+C=-\dfrac{8}{\ln 6}\cdot 6^{-x}+\dfrac{2^{-x}}{\ln 2}+C.$

Достаточно часто при нахождении первообразных (неопределенных интегралов) используется замена переменной интегрирования.

Пример 8

Вычислим: а) $\int \frac{e^{4x}dx}{\sqrt{1-e^{4x}}}$; б) $\int (5-2x)e^{-x^2+5x}dx$.

а) Введем новую переменную $t=\sqrt{1-e^{4x}}=\left(1-e^{4x}\right)^{\frac{1}{2}}$, тогда $dt=\frac{1}{2}\left(1-e^{4x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-e^{4x}\right)\cdot 4dx=-\frac{2e^{4x}dx}{\sqrt{1-e^{4x}}}$, откуда $\frac{e^{4x}dx}{\sqrt{1-e^{4x}}}=-\frac{1}{2}dt$.

Получаем: $\int \frac{e^{4x}dx}{\sqrt{1-e^{4x}}}=\int -\frac{1}{2}dt=-\frac{t}{2}+C=-\frac{1}{2}\sqrt{1-e^{4x}}+C$.

б) Введем новую переменную $t=e^{-x^2+5x}$, тогда $dt=e^{-x^2+5x}\cdot(-2x+5)dx=$ $=(5-2x)e^{-x^2+5x}dx$. Получаем: $\int (5-2x)e^{-x^2+5x}dx=\int dt=t+C=e^{-x^2+5x}+C$.

Аналогично решаются задачи, связанные с определенными интегралами.

Пример 9

Вычислим $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}3e^{2x}, \text{ если } x\in[-1;\,0]\\ x^2+3, \text{ если } x\in(0;\,1]\end{cases}$.

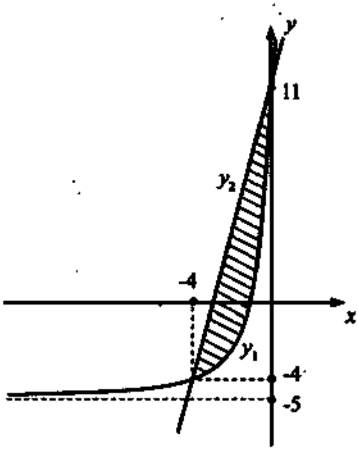
Так как функция на промежутке интегрирования имеет разный вид, то $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx=\int\limits_{-1}^{0} 3e^{2x}dx+\int\limits_{0}^{1}\left(x^2+3\right)dx=\frac{3}{2}e^{2x}\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^3}{3}+3x\right)\Big|_{0}^{1}=$

$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}e^{-2}+\frac{1}{3}+3=4\frac{5}{6}-\frac{3}{2e^2}$.

Пример 10

Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y_1=2^{x+4}-5$ и $y_2=\frac{15x}{4}+11$.

На рисунке схематично изображены графики данных функций. Для нахождения абсцисс точек пересечения этих графиков надо решить уравнение $y_1=y_2$ или $2^{x+4}-5=\frac{15x}{4}+11$.



Решить это уравнение невозможно. Подбором находим его корни: $x_1 = -4$ и $x_2 = 0$. Тогда площадь данной фигуры $S = \int_{-4}^{0} (y_2 - y_1)\,dx =$

$$= \int_{-4}^{0} \left(\frac{15x}{4} + 16 - 2^{x+4} \right) dx = \left(\frac{15x^2}{8} + 16x - \frac{2^{x+4}}{\ln 2} \right) \Bigg|_{-4}^{0} = -\frac{2^4}{\ln 2} - \left(30 - 64 - \frac{2^0}{\ln 2} \right) =$$

$$= -34 - \frac{15}{\ln 2}.$$

III. Задание на уроках

№ 538 (а, г); 539 (а); 540 (г); 541 (в); 542 (б); 543 (в); 544 (г); 545 (в); 546 (г); 547 (а, г); 548 (а, б).

IV. Контрольные вопросы

1. Расскажите о числе *e*.
2. Выведите формулу для производной экспоненты.
3. Что такое натуральный логарифм числа?
4. Получите формулу для производной показательной функции.
5. Первообразная показательной функции (с доказательством).

V. Задание на дом

538 (б, в); 539 (б); 540 (б); 541 (а); 542 (в); 543 (г); 544 (б); 545 (а); 546 (а); 547 (б, в); 548 (в, г).

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 61–62. Производная логарифмической функции

Цель: получить формулы для производной и первообразной логарифмической функции.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Найдите производную функции $f(x)=7^x\cdot\sin x$.

Ответы: а) $f'(x)=7^x\ln 7\cdot\cos x$; б) $f'(x)=7^x(\ln 7\cdot\sin x+\cos x)$; в) $f'(x)=\dfrac{7^x}{\ln 7}\cdot\cos x$; г) $f'(x)=7^x\left(\dfrac{\sin x}{\ln 7}+\cos x\right)$.

2. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=3^{1-2x}$.

Ответы: а) $F(x)=\dfrac{3^{1-2x}}{\ln 3}+C$; б) $F(x)=-\dfrac{3^{1-2x}}{\ln 3}+C$; в) $F(x)=3^{1-2x}\ln 3+C$; г) $F(x)=-\dfrac{3^{1-2x}}{2\ln 3}+C$.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2^x$, $y=4^x$, $x=2$.

Ответы: а) $\dfrac{9}{2\ln 2}$; б) $\dfrac{7}{2\ln 2}$; в) $\dfrac{11}{2\ln 2}$; г) $\dfrac{7}{\ln 2}$.

Вариант 2

1. Найдите производную функции $f(x)=3^x\cdot\cos x$.

Ответы: а) $f'(x)=3^x(\ln 3\cdot\cos x-\sin x)$; б) $f'(x)=-3^x\ln 3\cdot\sin x$; в) $f'(x)=3^x(\cos x-\ln 3\cdot\sin x)$; г) $f'(x)=-\dfrac{3^x\sin x}{\ln 3}$.

2. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=2^{5-3x}$.

Ответы: а) $F(x)=\dfrac{2^{5-3x}}{\ln 2}+C$; б) $F(x)=-\dfrac{2^{5-3x}}{\ln 2}+C$; в) $F(x)=-\dfrac{2^{5-3x}}{3\ln 2}+C$; г) $F(x)=2^{5-3x}\ln 2+C$.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=3^x$, $y=9^x$, $x=2$.

Ответы: а) $\frac{33}{\ln 3}$; б) $\frac{30}{\ln 3}$; в) $\frac{33}{2\ln 3}$; г) $\frac{32}{\ln 3}$.

III. Изучение нового материала

Сначала разберемся с **производной логарифмической функции**. Графики взаимно обратных функций $y=\log_a x$ и $y=a^x$ симметричны относительно прямой $y = x$. Показательная функции **дифференцируема** в любой точке, и ее **производная не обращается в нуль**. Поэтому в каждой точке **касательная** к графику показательной функции **не горизонтальна**. Следовательно, и график логарифмической функции имеет **невертикальную касательную** в каждой точке области определения. Это означает **дифференцируемость логарифмической функции** в ее области определения.

Покажем, что **производная логарифмической функции** $\log_a x$ для любого x из области определения находится по формуле $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$. Используем основное логарифмическое тождество $x=a^{\log_a x}$ и найдем производную от обеих частей этого равенства: $(x)'=(a^{\log_a x})'$, или $1=a^{\log_a x}\cdot\ln a\cdot(\log_a x)'$, или $1=x\cdot\ln a\cdot(\log_a x)'$. Из этого соотношения выразим $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$. **В частном случае** при $a=e$ получим: $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

Пример 1

Найдем производные функций: а) $y=\ln(5x+x^2)$; б) $y=\log_3(\sin x)$; в) $y=\log_2(x+\sqrt{1+x^2})$.

Все приведенные функции являются сложными. Используем правило дифференцирования сложной функции и получим:

а) $y'=\frac{1}{5x+x^2}\cdot(5x+x^2)'=\frac{5x+2x}{5x+x^2}$.

б) $y'=\frac{1}{\sin x\cdot\ln 3}\cdot(\sin x)'=\frac{\cos x}{\sin x\ln 3}=\frac{\operatorname{ctg} x}{\ln 3}$.

в) $y'=\frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})\ln 2}\cdot(x+\sqrt{1+x^2})'=\frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})\ln 2}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=$

$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\cdot\ln 2}$.

Применяя **свойства логарифмов**, можно решать и более сложные задачи.

Пример 2

Найдем производные функций: а) $y=(\sin x)^{\cos x}$; б) $y=\log_{\sin x}\cos x$.

а) Используем основное логарифмическое тождество и запишем функцию в виде $y=(e^{\ln\sin x})^{\cos x}=e^{\cos x\cdot\ln\sin x}$. Теперь найдем производную этой функции: $y'=e^{\cos x\cdot\ln\sin x}\cdot(\cos x\cdot\ln\sin x)'=(\sin x)^{\cos x}\cdot\left(-\sin x\cdot\ln\sin x+\cos x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)=$

$$=(\sin x)^{\cos x}\cdot\sin x\left(-\ln\sin x+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=(\sin x)^{\cos x+1}\cdot(\operatorname{ctg}^2 x-\ln\sin x).$$

б) Используем формулу перехода к новому основанию и запишем функцию в виде $y=\dfrac{\ln\cos x}{\ln\sin x}$. Теперь применим формулу для производной частного: $y'=\dfrac{(\ln\cos x)'\cdot\ln\sin x-\ln\cos x\cdot(\ln\sin x)'}{\ln^2\sin x}=$

$$=\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}\ln\sin x-\ln\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}}{\ln^2\sin x}=-\frac{1}{\ln^2\sin x}(\operatorname{tg}x\cdot\ln\sin x+\operatorname{ctg}x\cdot\ln\cos x).$$

Производная логарифмической функции используется во многих прикладных задачах.

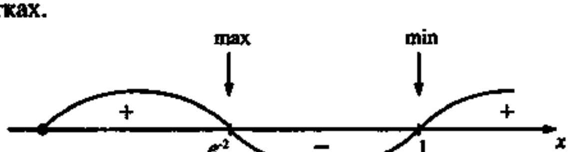
Пример 3

Исследуем функцию $y=x\ln^2 x$ и построим ее график.

Область определения этой функции – множество положительных чисел R_+. При всех $x\neq 1$ значения функции положительны, при $x=1$ функция $y=0$. Найдем производную данной функции: $y'=(x\ln^2 x)'=$

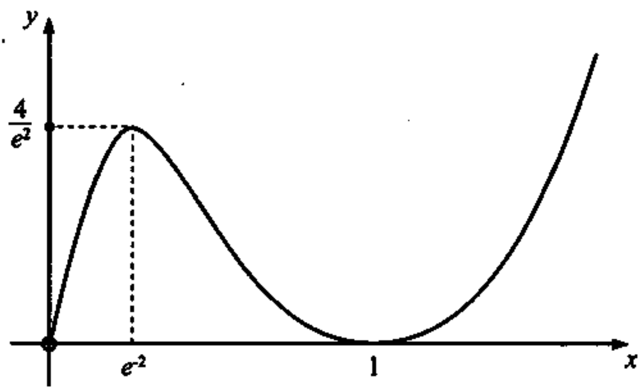
$$=x'\cdot\ln^2 x+x(\ln^2 x)'=\ln^2 x+x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\ln x(\ln x+2).$$

Производная обращается в ноль в точках $x=1$ и $x=e^{-2}$. Отметим эти точки на координатной оси и расставим знаки производной в промежутках.



Видно, что функция $y(x)$ возрастает на промежутках $(0;\,e^{-2})$ и $[1;\,\infty)$ и убывает на промежутке $[e^{-2};\,1]$. В точке $x=e^{-2}\approx 0{,}12$ функция имеет максимум: $y_{max}=y(e^{-2})=e^{-2}(\ln e^{-2})^2=\dfrac{4}{e^2}\approx 0{,}5$ и в точке $x=1$ –

минимум: $y_{\min} = y(1) = 1 \cdot \ln^2 1 = 0.$. Теперь легко построить график функции $y(x)$. На рисунке представлен эскиз графика (не соблюден масштаб).



Пример 4

При различных значениях параметра a определим число решений уравнения $x\ln^2 x = a$.

В одной системе координат построим графики функций $y_1 = x\ln^2 x$ (уже построен) и $y_2 = a$ (горизонтальная прямая). Тогда легко ответить на вопрос задачи. При $a \in (-\infty; 0)$ уравнение решений не имеет (0 решений); при $a \in \{0\} \cup \left(\frac{4}{e^2}; \infty\right)$ – 1 решение; при $a \in \left(0; \frac{4}{e^2}\right)$ – 3 решения; при $a = \frac{4}{e^2}$ – 2 решения.

Пример 5

Напишем уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x\ln^2 x$ в точке $x_0 = e$.

Найдем значение производной $f'(x)$ и самой функции $f(x)$ в точке $x_0 = e$ и получим: $f'(e) = \ln e \cdot (\ln e + 2) = 3$ и $f(e) = e \cdot \ln^2 e = e$ (воспользовались результатами примера 3). Подставим эти величины в уравнение касательной $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Имеем: $y = 3(x - e) + e = 3x - 2e$. Итак, уравнение касательной $y = 3x - 2e$.

Из формулы $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ следует, что на промежутке $(0; \infty)$ функция $F(x) = \ln x + C$ является **первообразной** для функции $f(x) = \frac{1}{x}$.

Но функция $f(x)=\frac{1}{x}$ имеет первообразную $F(x)=\ln(-x)+C$ и на промежутке $(-\infty;\ 0)$. Найдем производную $F'(x)=\left(\ln(-x)+C\right)'=$ $=\left(\ln(-x)\right)'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$. Таким образом, выполнено равенство $F'(x)=f(x)$ и функция $F(x)=\ln(-x)+C$ – первообразная для функции $f(x)=\frac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty;\ 0)$.

Учтем, что $|x|=x$ при $x>0$ и $|x|=-x$ при $x<0$, и объединим два рассмотренных случая. В итоге доказано: на любом промежутке, не содержащем точку O, для функции $f(x)=\frac{1}{x}$ первообразной является функция $F(x)=\ln|x|+C$.

Пример 6

а) Для функции $f(x)=\frac{7}{x-2}$ первообразная равна $F(x)=7\ln|x-2|+C$ (на любом промежутке, не содержащем точку $x=2$).

б) Для функции $f(x)=\frac{2}{3x+1}$ общий вид первообразных $F(x)=\frac{2}{3}\ln|3x+1|+C$ (на любом промежутке, не содержащем точку $x=-\frac{1}{3}$.

Вычисление многих **первообразных** (неопределенных **интегралов**) приводит к логарифмическим функциям.

Пример 7

Вычислим: а) $\int\frac{3x^2-x-1}{x+1}dx$; б) $\int\frac{dx}{x^2+2x-3}$.

а) В подынтегральной функции выделим целую часть. Для этого столбиком разделим числитель дроби на ее знаменатель. Получаем:

$$\int\frac{3x^2-x-1}{x+1}dx=\int\left(3x-4+\frac{3}{x+1}\right)dx=\frac{3}{2}x^2-4x+3\ln|x+1|+C.$$

б) Подынтегральную функцию $\frac{1}{x^2+2x-3}$ надо представить в виде алгебраической суммы простых дробей. Разложим знаменатель дроби на множители: $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$. Поэтому

$\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{1}{(x-1)(x+3)}$. Понятно, что такая дробь может получиться только в результате сложения дробей со знаменателями $x-1$ и $x+3$ и неизвестными числителям. Обозначим эти числители a и b соответственно. Тогда $\frac{1}{(x-1)(x+3)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}$. В правой части этого тождества приведем дроби к общему знаменателю и получим: $\frac{1}{(x-1)(x+3)}=\frac{ax+3a+bx-b}{(x-1)(x+3)}$ или $\frac{1}{(x-1)(x+3)}=\frac{(a+b)x+(3a-b)}{(x-1)(x+3)}$. В числителе правой части мы выделили слагаемые, зависящие и не зависящие от x. Так как полученное равенство является тождеством (т. е. должно выполняться при всех допустимых значениях x), то в левой части числитель дроби не зависит от x, в правой – зависит. Поэтому для определения величин a и b возникает система линейных уравнений $\begin{cases} a+b=0 \\ 3a-b=1 \end{cases}$. Решив эту систему, найдем $a=\frac{1}{4}$ и $b=-\frac{1}{4}$. Тогда $\frac{1}{(x-1)(x+3)}=\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+3)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)$. Фактически был использован метод неопределенных коэффициентов.

Теперь легко найти требуемый интеграл. Имеем: $\int\frac{dx}{x^2+2x-3}=$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\frac{1}{4}\left(\ln|x-1|-\ln|x+3|\right)+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C.$$

Очень часто, при вычислении интегралов используется **замена переменной интегрирования**.

Пример 8

Найдем: а) $\int \operatorname{tg} x\,dx$; б) $\int\frac{\ln(5x-1)}{5x-1}dx$.

а) Вычислим $\int \operatorname{tg} x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$. Для этого введем новую переменную $t=\cos x$, тогда $dt=(\cos x)'dx=-\sin x\,dx$, откуда $\sin x\,dx=-dt$. Получаем: $\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{-dt}{t}=-\int\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C$. Итак, $\int \operatorname{tg} x\,dx=-\ln|\cos x|+C$.

б) Введем новую переменную $t=\ln(5x-1)$, тогда $dt=(\ln(5x-1))'dx=$

$=\frac{5}{5x-1}dx$, откуда $\frac{dx}{5x-1}=\frac{dt}{5}$. Получаем: $\int\frac{\ln(5x-1)}{5x-1}dx=\int t\cdot\frac{dt}{5}=$

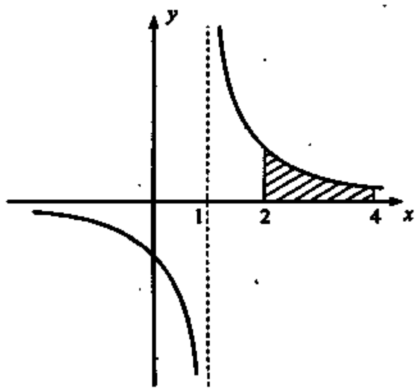
$=\frac{1}{5}\int t\,dt=\frac{1}{5}\cdot\frac{t^2}{2}+C=\frac{1}{10}t^2+C=\frac{1}{10}\ln^2(5x-1)+C.$

Достаточно часто в рассматриваемой теме встречаются задачи прикладного характера.

Пример 9

Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{2}{x-1}$, $y=0$, $x=2$, $x=4$.

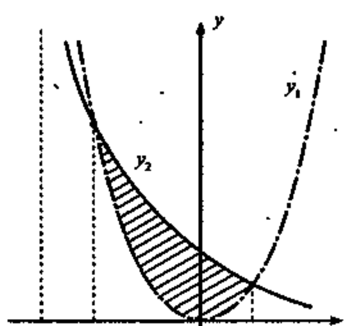
На рисунке схематично изображена данная фигура.



Площадь этой фигуры $S=\int\limits_2^4\frac{2}{x-1}dx=2\ln|x-1|\Big|_2^4=2\ln 3-2\ln 1=2\ln 3$.

Пример 10

Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y_1=x^2$ и $y_2=\frac{4}{x+3}$.



На рисунке изображены графики функций y_1 и y_2 и данная фигура. Прежде всего необходимо установить абсциссы точек пересчисления графиков функции y_1 и y_2. Для этого надо решить уравнение $x^2=\dfrac{4}{x+3}$ или $x^3+3x^2-4=0$. Его корни $x_1=-2$ и $x_2=1$. Тогда площадь данной фигуры $S=\int\limits_{-2}^{1}(y_2-y_1)dx=\int\limits_{-2}^{1}\left(\dfrac{4}{x+3}-x^2\right)dx=$

$$=\left(4\ln|x+3|-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=4\ln 4-\frac{1}{3}-\left(4\ln 1+\frac{8}{3}\right)=8\ln 2-3.$$

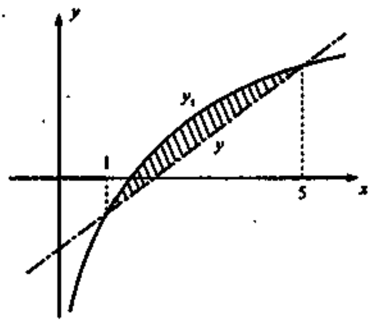
Пример 11

Найдем площадь фигуры, ограниченной кривой $y_1=\dfrac{4x-5}{x}$ и касательной к графику функции $y_2=0{,}5\ln(2x-3)$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

Прежде всего получим уравнение касательной. Для этого найдем: $y_2'=0{,}5\cdot\dfrac{1}{2x-3}\cdot 2=\dfrac{1}{2x-3}$. Вычислим значения y'_2 и y_2 в точке x_0. Получаем: $y_2'(2)=\dfrac{1}{2\cdot 2-3}=1$ и $y_2(2)=0{,}5\ln(2\cdot 2-3)=0$. Подставим эти величины в уравнение касательной. Имеем: $y=1\cdot(x-2)+0$ или $y=x-2$. Построим графики функций y_1 и y и найдем абсциссы их точек пересечениях. Для этого решим уравнение: $\dfrac{4x-5}{x}=x-2$ или $0=x^2-6x+5$. Его корни $x_1=1$ и $x_2=5$. Площадь искомой фигуры

$$S=\int\limits_{1}^{5}(y_1-y)dx=\int\limits_{1}^{5}\left(\frac{4x-5}{x}-(x-2)\right)dx=\int\limits_{1}^{5}\left(6-x-\frac{5}{x}\right)dx=$$

$$=\left(6x-\frac{x^2}{2}-5\ln|x|\right)\Bigg|_{1}^{5}=\left(30-\frac{25}{2}-5\ln 5\right)-\left(6-\frac{1}{2}-5\ln 1\right)=15-5\ln 5.$$



Наконец, обсудим вопрос о первообразной (неопределенном интеграле) логарифмической функции. Подобные задачи достаточно сложны и решаются методом **интегрирования по частям** (см. предыдущую тему): $\int UdV = UV - \int VdU$. Рассмотрим самый простейший пример.

Пример 12

Найдем $\int \ln x\,dx$.

Будем считать, что $U = \ln x$ и $dV = dx$, тогда $dU = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx$ и $V = \int dx = x$. Используя формулу интегрирования по частям, найдем: $\int \ln x\,dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$.

IV. Задание на уроках

№ 549 (а, г); 550 (б, в); 551 (а); 552 (г); 553 (б); 554 (а, в); 555 (а, б); 556 (б); 557 (а).

V. Контрольные вопросы

1. Чему равна производная функции $f(x) = \ln x$?
2. Найдите производную функции $f(x) = \log_a x$.
3. Чему равна первообразная для функции $f(x) = \frac{1}{x}$?

VI. Задание на дом

№ 549 (б, в); 550 (а, г); 551 (б); 552 (а); 553 (г); 554 (б, г); 555 (в, г); 556 (г); 557 (г).

VII. Творческие задания

1. Вычислите неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{4-x^2}$; б) $\int \frac{dx}{x^2-9}$;

в) $\int \frac{dx}{x^2\_4x-5}$; г) $\int \frac{dx}{x^2-5x+4}$;

д) $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$; е) $\int \frac{dx}{5x^2-2x-3}$;

ж) $\int \frac{4x^2-x+1}{x-1}dx$; з) $\int \frac{3x^2-2x+1}{x+2}dx$;

и) $\int \frac{2x+4}{x^2+4x-5}dx$; к) $\int \frac{3x-9}{x^2-5x+4}dx$;

л) $\int \frac{dx}{(2\operatorname{tg} x-3)\cos^2 x}$; м) $\int \frac{dx}{(3\operatorname{ctg} x-1)\sin^2 x}$;

н) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}-4}$; о) $\int \frac{3^x dx}{3^x-2}$;

п) $\int \frac{(3-4\ln^2 x)^6 \ln x}{x}dx$; р) $\int \frac{(3\ln^2 x-1)^5 \ln x}{x}dx$;

с) $\int x^2 \ln x\,dx$; т) $\int x^3 \ln x\,dx$.

Ответы: а) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+C$; б) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$;

в) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+C$; г) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right|+C$;

д) $\frac{1}{4}(\ln|x-1|-3\ln|3x+1|)+C$; е) $\frac{1}{8}(\ln|x-1|-5\ln|5x+3|)+C$;

ж) $2x^2+3x+4\ln|x-1|+C$; з) $\frac{3}{2}x^2-8x+17\ln|x+2|+C$;

и) $\ln|x^2+4x-5|+C$; к) $2\ln|x-1|+\ln|x-4|+C$;

л) $\frac{1}{2}\ln|2\operatorname{tg} x-3|+C$; м) $-\frac{1}{3}\ln|3\operatorname{ctg} x-1|+C$;

н) $\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-4|+C$; о) $\log_3|3^x-2|+C$;

п) $-\frac{1}{56}(3-4\ln^2 x)^7+C$; р) $\frac{1}{36}(3\ln^2 x-1)^6+C$;

с) $\frac{x^3}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)+C$; т) $\frac{x^4}{4}\left(\ln x-\frac{1}{4}\right)+C$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\frac{1}{x}$, $x+2y=4$; б) $y=\frac{2}{x}$, $y=3x-1$, $x=5$, $y=0$;

в) $y=\frac{3}{x}$, $y=4$, $y=6$, $x=0$; г) $y=\frac{7}{x}$, $y=\frac{1}{2}$, $x=3$;

д) $y=x^2+2x+3$, $y=\frac{6}{2-x}$; е) $y=\frac{1}{2}x^2+2x+3$, $y=\frac{3}{1-x}$;

ж) $y=4-\frac{6}{|x+1|}$, $y=|x-2|$; з) $y=2-|x-2|$, $y=\frac{3}{|x|}$;

и) $y=2^{x+4}-5$, $y=\frac{15x}{4}+11$; к) $y=2^{4-x}-6$, $y=-\frac{15}{4}x+10$.

Ответы: а) $2\sqrt{2}-\ln(3+2\sqrt{2})$; б) $\frac{2}{3}+2\ln 5$; в) $3\ln\frac{3}{2}$; г) $7\ln\frac{14}{3}-\frac{11}{2}$; д) $4+6\ln\frac{3}{4}$; е) $1+3\ln\frac{3}{4}$; ж) $6(1-\ln 3)$; з) $2-\frac{3}{2}\ln 3$; и, к) $34-\frac{15}{\ln 2}$.

VIII. Подведение итогов уроков

Урок 63. Степенная функция

Цели: рассмотреть степенную функцию, ее свойства; получить формулы для вычисления производной и первообразной.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Найдите производную функции $f(x)=\log_3(x^4-3x^2+x)$.

2. Найдите первообразную функции $f(x)=\frac{4x^3}{x^4+7}$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{3}{x-2}$, $y=1, x=5$.

Вариант 2

1. Найдите производную функции $f(x)=\log_2(x^3-6x^2+7x)$.

2. Найдите первообразную функции $f(x)=\frac{5x^4}{x^5-6}$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{5}{x-4}$, $y=1, x=9$.

III. Изучение нового материала

С частными случаями степенной функции $f(x)=x^a$ учащиеся знакомы уже с 7 класса. Теперь необходимо **упорядочить и обобщить** известные **результаты**, получить формулы для вычисления **производной и первообразной** степенной функции.

· Для положительного числа x и любого действительного числа α определено число x^α, поэтому разумно рассмотреть функцию $f(x)=x^\alpha$, которая называется **степенной функцией** (с показателем степени α).

Прежде всего покажем, что при произвольном значении α и положительных значениях x **производная степенной функции** вычисляется **по формуле** $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$. Используя основное логарифмическое тождество, получаем: $x=e^{\ln x}$, тогда $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$. применяя правило вычисления производной сложной функции, найдем: $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha\ln x}\cdot(\alpha\ln x)'=x^\alpha\cdot\alpha\cdot\dfrac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$.

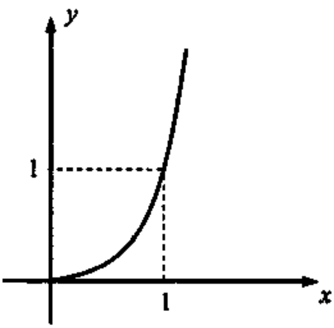
Так как **поведение** степенной **функции** существенно **зависит от знака и величины показателя** α, то рассмотрим основные случаи.

1) Если $\alpha>0$, то степенная функция определена и при $x=0$. При целых α степенная функция определена также и для $x<0$. Причем при четных α функция $f(x)=x^\alpha$ является четной, при нечетных α – нечетной.

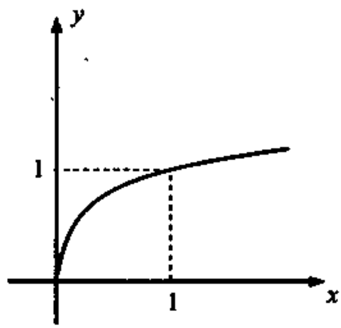
Так как $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, то для $x\in[0;\infty)$ при $\alpha>0$ степенная функция возрастает (т. е. $(x^\alpha)'>0$).

2) Если $\alpha<0$, то степенная функция определена только при $x>0$. В этом случае ее производная $(x^\alpha)'<0$ и функция убывает на промежутке $(0;\infty)$.

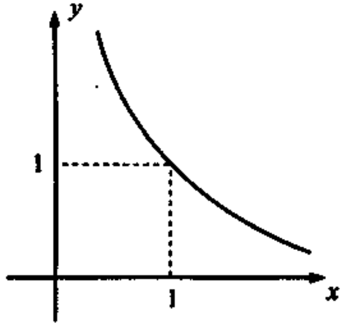
Примеры поведения графиков степенной функции **для различных значений** показателя α приведены на рисунках.



$\alpha>1$



$0<\alpha<1$



$\alpha < 0$

Теперь остановимся на **первообразной** степенной функции $f(x) = x^{\alpha}$. При $\alpha \neq -1$ общий вид первообразных $F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

При $\alpha = -1$ (т. е. для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$) общий вид первообразных $F(x) = \ln|x| + C$.

Пример 1

Найдем производную функции $f(x) = (3x+5)^{\sqrt{7}+1}$.

Используем правило дифференцирования сложной функции и формулу производной степенной функции. Получаем: $f'(x) = (\sqrt{7}+1)(3x+5)^{\sqrt{7}} \cdot (3x+5)' = 3(\sqrt{7}+1)(3x+5)^{\sqrt{7}}$.

Пример 2

Найдем первообразную функции $f(x) = (2x-3)^{\sqrt{5}-1}$.

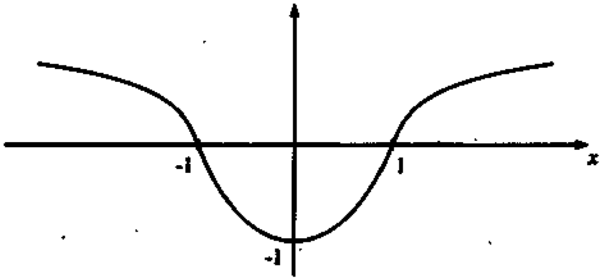
Применяя правило интегрирования сложной функции и формулу первообразной степенной функции, имеем: $F(x) = \dfrac{(2x-3)^{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}\cdot 2} + C = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}(2x-3)^{\sqrt{5}} + C$.

Пример 3

Построим график функции $y = (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$.

Очевидно, что данная функция является четной (т. е. $y(-x) = y(x)$ и ее график симметричен относительно оси ординат). Точка пересечения с осью ординат $y = -1$, точки пересечения с осью абсцисс $x = \pm 1$. Найдем производную функции $y' = \dfrac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \dfrac{2}{3}x(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}$. В точке $x = 0$ производная обращается в нуль. При $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0]$

величина $y' < 0$ и функция y убывает. При $x \in [0; 1) \cup (1; \infty)$ производная $y' > 0$ и функция y возрастает. В точках $x = \pm 1$ производная не существует. Поэтому график функции пересекает ось абсцисс под прямым углом. При $x \to \infty$ функция $y = x^{\frac{2}{3}}$. Строим график данной функции.

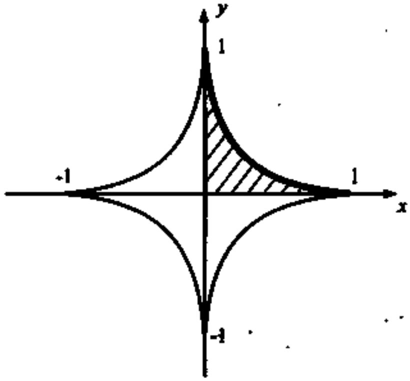


Пример 4

Построим график уравнения $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

По внешнему виду данное уравнение напоминает уравнение окружности и симметрично по переменным x и y. Поэтому график будет симметричен относительно оси абсцисс и оси ординат. При $x, y \geq 0$ выразим зависимость $y(x)$: $y^{\frac{2}{3}} = 1 - x^{\frac{2}{3}}$ или $y = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^3}$.

Очевидно, что такая функция определена при $x \in [0; 1]$ и принимает неотрицательные значения. Найдем производную функции $y' = \frac{3}{2}\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) = -x^{-\frac{1}{3}}\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x}}$. Видно, что при $x \in (0; 1)$ производная $y' < 0$ и функция y убывает. При $x \to 0$ производная не существует и график подходит к оси ординат под прямым углом. При $x \to 1$ производная $y' \to 0$ и график функции подходит к оси абсцисс под нулевым углом. В первой четверти строим график функции и симметрично отображаем его относительно осей координат. Получаем график данного уравнения. Заметим, что в математике такая замкнутая кривая называется **астроидой**.



Пример 5

Найдем площадь фигуры, ограниченной астроидой.

Отметим, что эта задача достаточно сложная. Сначала вычислим площадь части фигуры, расположенной в первой четверти. Такая площадь равна $S_0=\int\limits_0^1 y(x)dx=\int\limits_0^1\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}dx$. Полученный интеграл достаточно сложный и может быть вычислен с помощью замены переменной. Введем новую переменную t таким образом, что $x=\sin^3 t$. Тогда $1-x^{\frac{2}{3}}=1-\sin^2 t=\cos^2 t$, и $y=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=(\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}=\cos^3 t$, и $dx=3\sin^2 t\cos t dt$, где $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Площадь $S_0=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3 t\cdot 3\sin^2 t\cos t\, dt=$ $=3\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^4 t\, dt$. Представим подынтегральную функцию в виде суммы тригонометрических функций, используя формулы тригонометрии: $f(t)=\sin^2 t\cos^4 t=\frac{1}{4}\sin^2 2t\cos^2 t=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4t}{2}\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}=$

$$=\frac{1}{16}(1+\cos 2t-\cos 4t-\cos 2t\cos 4t)=\frac{1}{16}\left(1+\cos 2t-\cos 4t-\frac{1}{2}(\cos 2t+\cos 6t)\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2}\cos 2t-\cos 4t-\frac{1}{2}\cos 6t\right).$$

Имеем: $S_0=\frac{3}{16}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\frac{1}{2}\cos 2t-\cos 4t-\frac{1}{2}\cos 6t\right)dt=$

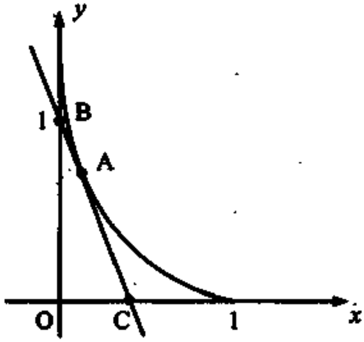
$=\frac{3}{16}\left(t-\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{4}\sin 4t-\frac{1}{12}\sin 6t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{32}\pi$ (было учтено, что все тригонометрические функции при $t=\frac{\pi}{2}$ и $t=0$ равны нулю). Тогда площадь всей фигуры, ограниченной астроидой, составляет $S=4S_0=\frac{3}{8}\pi$.

Таким образом, несмотря на схожесть уравнений астроиды и окружности, площадь фигуры, заключенной внутри астроиды, составляет $\frac{3}{8}$ площади соответствующего круга.

Пример 6

Найдем длину отрезка касательной, проведенной к астроиде, и заключенного между осями координат.

Будем считать, что касание происходит в точке A, расположенной в первой четверти. Из примера 4 известен вид функции $y=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ и ее производной $y'=-x^{-\frac{1}{3}}\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$. Пусть точка A имеет абсциссу, равную x_0. Тогда легко записать уравнение касательной к астроиде: $y=-x_0^{-\frac{1}{3}}\left(1-x_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(x-x_0)+\left(1-x_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ или $y=-x_0^{-\frac{1}{3}}\left(1-x_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x+\left(1-x_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$. Положим, $x=0$ и найдем точку B пересечения касательной с осью ординат: $y=\left(1-x_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$. Положим, $y=0$ и найдем точку C пересечения касательной с осью абсцисс: $x=x_0^{\frac{1}{3}}$. Тогда из прямоугольного ΔBOC по теореме Пифагора $BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=\sqrt{1-x_0^{\frac{2}{3}}+x_0^{\frac{2}{3}}}=1$.



Таким образом, независимо от выбора точки касания A длина отрезка BC касательной, заключенного между координатными осями, постоянна и равна 1.

Обсудим теперь вычисление значений степенной функции. Получим приближенную формулу $(1+\Delta x)^{\alpha} \approx 1+\alpha\Delta x$. Для этого используем хорошо известную формулу $f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$. В случае степенной функции $f(x)=x^{\alpha}$ имеем: $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$. Полагая $x_0 = 1$ и $x = 1 + \Delta x$, получим: $(1+\Delta x)^{\alpha} \approx 1+\alpha\Delta x$.

Пример 7

Вычислим приближенные значения: а) $1{,}02^{12}$; б) $3{,}09^4$; в) $\left(5\frac{1}{3}\right)^3$.

Используем выведенную формулу (при необходимости выполним некоторые преобразования). Имеем:

а) $1{,}02^{12} = (1 + 0{,}02)^{12} \approx 1 + 12 \cdot 0{,}02 = 1{,}24$;

б) $3{,}09^4 = 3^4 \cdot 1{,}03^4 \approx 81(1 + 0{,}03)^4 \approx 81\,(1 + 4 \cdot 0{,}03) = 81 \cdot 1{,}12 = 90{,}72$;

в) $\left(5\frac{1}{3}\right)^3 = 5^3 \cdot \left(1\frac{1}{15}\right)^3 = 125\left(1+\frac{1}{15}\right)^3 \approx 125\left(1+3\cdot\frac{1}{15}\right) = 125\cdot 1\frac{1}{5} = 150.$

Достаточно часто полученную формулу применяют при вычислении корней. Положим, $\alpha = \frac{1}{n}$ и получим: $(1+\Delta x)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{1+\Delta x} \approx 1+\frac{\Delta x}{n}$.

Пример 8

Вычислим приближенные значения: а) $\sqrt[3]{1{,}06}$; б) $\sqrt[4]{81{,}05}$; в) $\sqrt[3]{125\frac{1}{5}}$;

г) $\sqrt[3]{1000}$.

Используем полученную формулу. Тогда имеем:

а) $\sqrt[5]{1{,}06} = (1+0{,}06)^{\frac{1}{5}} \approx 1 + \dfrac{0{,}06}{5} = 1{,}012;$

б) $\sqrt[4]{81{,}05} = \sqrt[4]{81\left(1+\dfrac{0{,}05}{81}\right)} = 3\sqrt[4]{1+\dfrac{0{,}05}{81}} \approx 3\left(1+\dfrac{0{,}05}{81\cdot 4}\right) \approx 3{,}0005;$

в) $\sqrt[3]{125\dfrac{1}{5}} = \sqrt[3]{125\left(1+\dfrac{1}{625}\right)} = 5\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{625}} \approx 5\left(1+\dfrac{1}{625\cdot 3}\right) \approx 5{,}003;$

г) $\sqrt[5]{1000} = \sqrt[5]{4^5 - 25} = \sqrt[5]{4^5\left(1-\dfrac{24}{4^5}\right)} \approx 4\left(1-\dfrac{24}{4^5\cdot 5}\right) \approx 3{,}998.$

IV. Задание на уроке

№ 558 (а, г); 559 (б); 560 (б, в); 562 (а, б); 563 (а, г); 564 (б, в); 565 (а, б).

V. Контрольные вопросы

1. Дайте определение степенной функции.
2. Получите формулу для производной степенной функции.
3. Приведите характерные графики степенной функции.
4. Напишите формулу для первообразной степенной функции.
5. Получите формулу для вычисления приближенных значений степенной функции.

VI. Задание на дом

№ 558 (б, в); 559 (г); 560 (а, г); 562 (в, г); 563 (б, в); 564 (а, г); 565 (в, г).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 64–65. Понятие о дифференциальных уравнениях

Цель: дать представление о дифференциальных уравнениях и их использовании в физике.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Выведите формулу для производной степенной функции.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=7x^{-\frac{2}{3}}$ на промежутке $I=\left[\frac{1}{8};\ 27\right]$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^{\sqrt{2}}$, $y=\frac{1}{x^2}$, $x=2$.

4. Вычислите приближенное значение $\sqrt[3]{8{,}16}$.

Вариант 2

1. Выведите формулу для вычисления производных значений степенной функции.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=5x^{-\frac{3}{4}}$ на промежутке $I=\left[\frac{1}{16};\ 81\right]$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^{\sqrt{3}}$, $y=\frac{1}{x^3}$, $x=2$.

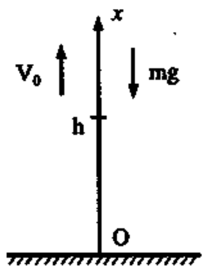
4. Вычислите приближенное значение $\sqrt[4]{16{,}32}$.

III. Изучение нового материала

Решение различных задач математики, физики, техники, биологии, химии и т. д. методом математического моделирования приводит к отысканию неизвестной функции из **уравнения, содержащего независимую переменную, искомую функцию и производные разных порядков этой функции**. Такое уравнение называется **дифференциальным**. Так же, как и алгебраические уравнения, дифференциальные уравнения подразделяются на некоторые **характерные типы**, определяемые видом этих уравнений. **Способ решения** дифференциального уравнения существенно **зависит от его типа**. Здесь нет возможности изложить теорию дифференциальных уравнений. Поэтому ограничимся примерами использования таких уравнений.

Пример 1

Рассмотрим движение тела массы m под действием силы тяжести.

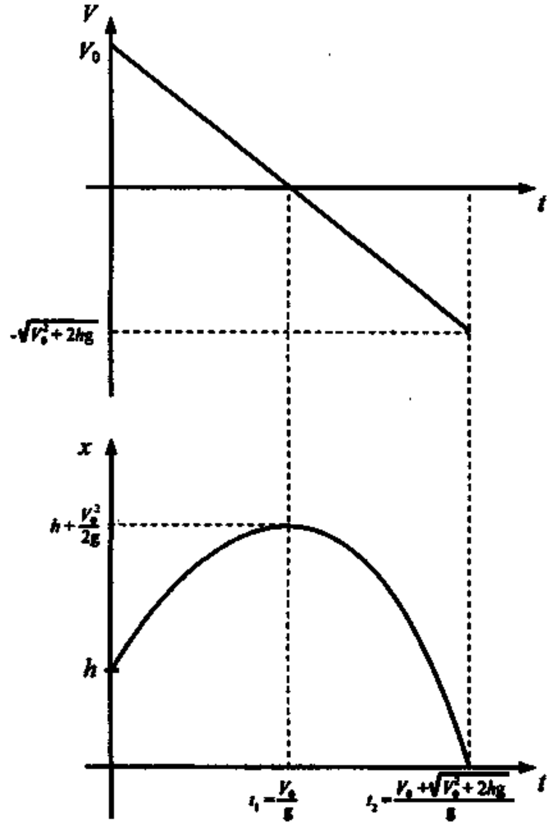


Введем ось координат, направленную вертикально вверх, с началом отсчета на уровне земли. Пусть тело бросают вверх с высоты h со скоростью V_0, то есть начальные условия задачи: $x(0) = h$ и $V(0) = V_0$.

Запишем закон Ньютона: $ma = F$, где a – ускорение тела, F – сила, действующая на тело (очевидно, что на тело действует сила тяжести $F = -mg$ (с учетом направления силы). Получаем уравнение $ma = -mg$ или $a = -g$. Так как ускорение тела $a = V'$, то уравнение имеет вид $V' = -g$. Найдем функцию $V(t) = \int -g\,dt = -gt + C_1$. Используя начальное условие, определим постоянную C_1. Получаем уравнение: $V(0) = -g \cdot 0 + C_1$ или $V_0 = C_1$. Тогда скорость тела меняется по закону $V(t) = V_0 - gt$ (равноускоренное движение).

Теперь найдем зависимость координаты x тела от времени t. Учтем, что $V = x'$, и получим уравнение $x' = V_0 - gt$, откуда $x = \int (V_0 - gt)dt = V_0 t - \frac{gt^2}{2} + C_2$. Для определения постоянной C_2 используем начальное условие. Получаем уравнение $x(0) = V_0 \cdot 0 - \frac{g \cdot 0^2}{2} + C_2$ или $h = C_2$. Тогда координата тела меняется по закону $x(t) = h + V_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Для наглядности поведение зависимостей $V(t)$ и $x(t)$ представлено на рисунках. Скорость тела $V(t)$ является линейной функцией. Эта функция убывает и при $t_1 = \frac{V_0}{g}$ обращается в ноль. В этот момент времени координата тела максимальна (наибольшая высота подъема) и равна $x(t_1) = h + \frac{V_0^2}{2g}$.

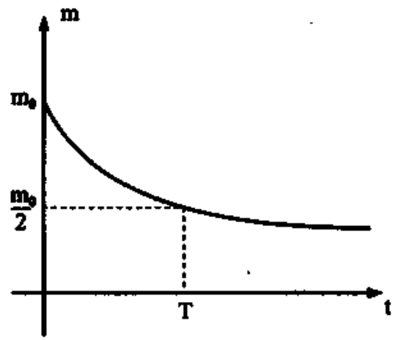


При $t > t_1$ тело падает вниз. Скорость тела при этом становится отрицательной и координата x убывает. В результате тело падает на землю $x(t_2)=0$. Решая уравнение $0=h+V_0t-\frac{gt^2}{2}$ или $gt^2-2V_0t-2h=0$, найдем этот момент времени: $t_2=\frac{V_0+\sqrt{V_0^2+2hg}}{g}$ (второй корень квадратного уравнения отрицательный и физического смысла не имеет). В момент времени t_2 легко вычислить скорость падения тела на землю: $V(t_2)=-\sqrt{V_0^2+2hg}$.

Пример 2

Рассмотрим радиоактивный распад вещества.

Экспериментально было установлено, что скорость уменьшения массы вещества $m(t)$ со временем t пропорциональна его количеству, т. е. $m'(t) = -km(t)$, где $k > 0$. Подобные уравнения называют **уравнениями показательного убывания (роста)**. Зная производную экспоненты, можно сообразить, что общее решение этого уравнения $m(t) = ce^{-kt}$. Пусть первоначальное количество вещества $m(0) = m_0$. Тогда легко определить постоянную C. Получаем уравнение $m(0) = Ce^{-k\cdot 0}$ или $m_0 = C$. Тогда количество вещества меняется по закону $m(t) = m_0e^{-kt}$, т. е. по показательному закону. График этой функции приведен на рисунке.



Промежуток времени T, через который масса радиоактивного вещества убывает вдвое, называют **периодом полураспада** такого вещества. Найдем эту характеристику. Получаем уравнение: $m(T) = \frac{m_0}{2}$, или $m_0e^{-kT} = \frac{m_0}{2}$, откуда $e^{-kT} = \frac{1}{2}$, или $e^{kT} = 2$, тогда $kT = \ln 2$ и $T = \frac{\ln 2}{k}$. Для наиболее распространенных радиоактивных веществ $T \sim 100 \div 1000$ лет.

Пример 3

Вернемся еще раз к примеру 1 и рассмотрим существенно более сложную задачу: движение тела массы m под действием силы тяжести с учетом сопротивления воздуха.

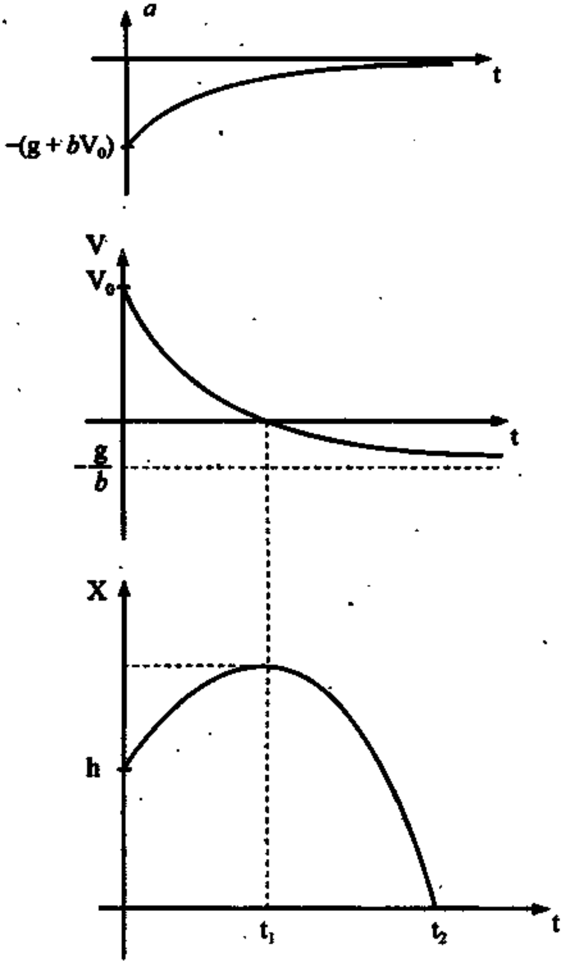
Будем считать, что сила сопротивления воздуха $\overline{F}$ пропорциональна скорости движения V и направлена в противоположную сторону, т. е. $\overline{F} = -kV$. Результирующая сила, действующая на тело, равна $F + \overline{F} = -mg - kV$. Записывая закон Ньютона, получаем уравнение $ma = -mg - kV$ или $a = -g - bV$ (где $b = \frac{k}{m} > 0$). Так как ускорение тела $a = V'$, то уравнение имеет вид $V' = -bV - g$. Заметим, что это уравнение похоже на уравнение из примера 2.

Можно показать, что общее решение этого уравнения $V(t)=C_1e^{-bt}-\frac{g}{b}$. Учтем начальное условие задачи: $V(0)=C_1e^{-b\cdot 0}-\frac{g}{b}$ или $V_0=C_1-\frac{g}{b}$, откуда $C_1=V_0+\frac{g}{b}$. Тогда скорость тела меняется по закону $V(t)=\left(V_0+\frac{g}{b}\right)e^{-bt}-\frac{g}{b}$. Сразу найдем ускорение тела: $a(t)=V'(t)=-(g+bV_0)e^{-bt}$.

Определим зависимость координаты x тела от времени t. Учтем, что $V=x'$, и получим уравнение $x'=\left(V_0+\frac{g}{b}\right)e^{-bt}-\frac{g}{b}$, откуда $x=\int\left(\left(V_0+\frac{g}{b}\right)e^{-bt}-\frac{g}{b}\right)dt=-\frac{1}{b}\left(V_0+\frac{g}{b}\right)e^{-bt}-\frac{g}{b}t+C_2$. Для определения постоянной C_2 используем начальное условие $x(0)=h$. Получаем: $h=-\frac{1}{b}\left(V_0+\frac{g}{b}\right)+C_2$, тогда $C_2=h+\frac{1}{b}\left(V_0+\frac{g}{b}\right)$. Координата тела меняется по закону $x(t)=h-\frac{g}{b}t+\frac{1}{b}\left(V_0+\frac{g}{b}\right)\left(1-e^{-bt}\right)$.

Видно, что полученные в этом примере формулы для $a(t)$, $V(t)$, $x(t)$ намного сложнее, чем в примере 1. Учтем, что $e^{-\alpha}\approx 1-\alpha+\frac{\alpha^2}{2}$ при $\alpha\to 0$ (см. понятие о числе e). Тогда при $bt\to 0$ (что соответствует началу процесса (малым значениям t) или слабому сопротивлению воздуха (малые b)) из приведенных формул можно получить более простые соотношения: $a(t)=-(g+bV_0)$, $V(t)=V_0-at$, $x(t)=g+V_0t-\frac{at^2}{2}$. Очевидно, что эти формулы совпадают с формулами примера 1, если в них заменить ускорение g на ускорение a. Поэтому качественно будем иметь такие же графики $V(t)$ и $x(t)$, как и в примере 1. Меняются количественные характеристики. В нашем случае становится меньше максимальная высота подъема и время t_1 на этот подъем, а также время t_2 падения тела на землю.

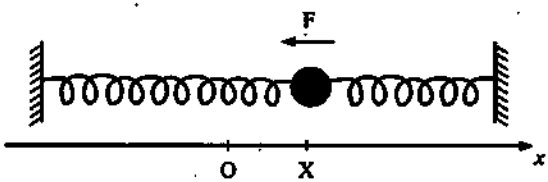
В случае произвольного сопротивления воздуха основные характеристики движения можно изобразить лишь качественно. Количественные расчеты не выполнимы, так как возникают трансцендентные уравнения, содержащие показательную функцию и многочлены. Заметим только, что при $t \to 0$ величина $e^{-bt} \to 0$. Графики этих зависимостей приведены на рисунках.



Видно, например, что при больших t скорость тела стремится к постоянной величине $\frac{g}{b}$, которая может быть достаточно малой при большем сопротивлении воздуха (b велико). Это объясняет необходимость использования парашюта при прыжках с самолета (происходит резкое увеличение параметра b).

Пример 4

Рассмотрим гармонические колебания.



Пусть шарик массой m закреплен между двумя пружинами. В положении равновесия координата центра шарика равна нулю. При смещении шарика в направлении оси Ox на величину x на шарик действует сила Гука, пропорциональная смещению x и направленная в противоположную сторону, т. е. $F=-kx$. По второму закону Ньютона $F=ma$. Получаем уравнение $ma=-kx$. Учтем, что $a=V'=x''$. Тогда уравнение принимает вид: $mx''=-kx$ или $x''=-\omega^2 x$ (где $\omega^2=\dfrac{k}{m}$).

Это уравнение называют дифференциальным **уравнением гармонических колебаний**.

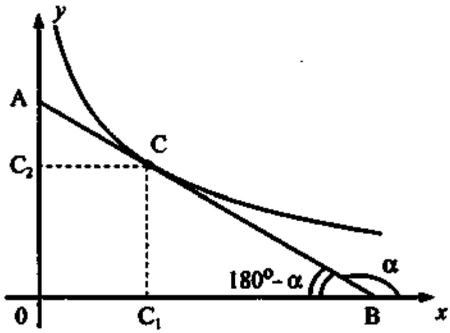
Легко показать, что решение этого уравнения $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$. При этом параметры A, ω и φ носят специальные названия: A – **амплитуда** колебаний, ω – циклическая (круговая) **частота** колебаний, φ – **начальная фаза** колебаний. Выбирают значения $A\geq 0$ и $\varphi\in[0;2\pi]$. Найдем скорость шарика $V(t)=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$ и его ускорение $a(t)=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$. Видно, что все три характеристики движения $x(t)$, $V(t)$, $a(t)$ меняются по периодическому закону, т. е. совершают колебания.

Отметим, что **частота** ω колебаний определяется **массой** m **шарика и жесткостью** k **пружины**, т. е. $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Если известны начальные условия $x(0)=x_0$ и $V(0)=V_0$, то **амплитуда** A и начальная **фаза** φ колебаний могут быть найдены из системы уравнений $\begin{cases}x_0=A\cos\varphi\\ V_0=-A\omega\sin\varphi\end{cases}$, откуда $tg\,\varphi=-\dfrac{V_0}{\omega x_0}$ (при этом $\varphi\in[0;2\pi]$) и $A=\dfrac{x_0}{\cos\varphi}$ (где $A\geq 0$).

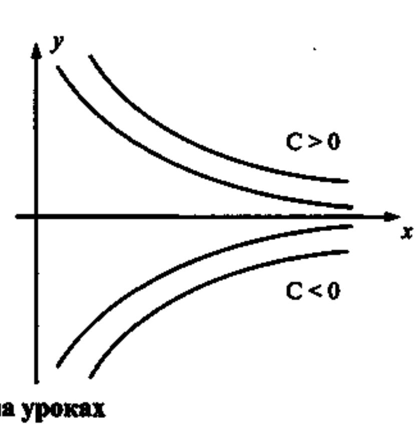
Разумеется, дифференциальные уравнения широко используются и в самой математике.

Пример 5

Найдем функцию $y = f(x)$, график которой обладает тем свойством, что отрезок любой касательной, заключенной между осями координат, делится в отношении 1:2 в точке касания, считая от оси ординат.



Пусть $C(x, y)$ – точка касания. Предположим, что кривая $y = f(x)$ расположена в первой четверти. По условию задачи $AC:CB = 1:2$. Поэтому $OC_1 = x$ и $C_1B = 2x$, $CC_1 = y$. Из $\Delta\ BCC_1$ получаем: $\operatorname{tg} CBC_1 = \frac{CC_1}{BC_1} = \frac{y}{2x} = \operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{y}{2x}$. С другой стороны, $\operatorname{tg}\alpha$ – угловой коэффициент касательной, который в точке $C(x, y)$ равен y'. Получаем дифференциальное уравнение $y' = -\frac{y}{2x}$. Общий вид решений этого уравнения $y = \frac{C}{\sqrt{x}}$. Тогда $y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ и выполняется равенство: $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{C}{2\sqrt{x}} : x$. Семейство кривых $y = \frac{C}{\sqrt{x}}$ представлено на рисунке.



IV. Задание на уроках

№ 568 (а); 570; 572 (б); 573 (г); 578; 580.

V. Контрольные вопросы

1. Напишите уравнение движения тела под действием силы тяжести и его решение.

2. Напишите уравнение показательного роста (убывания) и его решение.

3. Напишите уравнение гармонических колебаний и его решение.

VI. Задание на дом

№ 568 (г); 571; 572 (в); 573 (б); 576; 579.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 66–67. Контрольная работа по теме «Производная показательной и логарифмической функций»

Цель: проверить знания учащихся, используя разноуровневые варианты.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее и варианты 5, 6 – самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит шесть задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

1. Найдите производную функции $y = 2^x \cdot \sin x$.

2. Вычислите $\int xe^{x^2}dx$.

3. Определите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \ln x - x$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 8$.

5. Проведите исследование и постройте график функции $y = e^{x^2-2x}$.

6. Найдите решение уравнения $y' = -5y$, удовлетворяющее условию $y(0) = 3$.

Вариант 2

1. Найдите производную функции $y = 3^x \cdot \cos x$.

2. Вычислите $\int x^2e^{x^3}dx$.

3. Определите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = 2\ln x - x^2$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^{\frac{1}{4}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 16$.

5. Проведите исследование и постройте график функции $y = e^{4x-x^2}$.

6. Найдите решение уравнения $y' = -4y$, удовлетворяющее условия $y(0) = 7$.

Вариант 3

1. Найдите производную функции $y = 2^{x^3-2x} \cdot \sin 3x$.

2. Вычислите $\int (6x^2+1)e^{2x^3+x}dx$.

3. Найдите точки экстремума функции $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x + 7$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{6}{x+1}$, $y = 0$, $x^2 - 5x + 4 = 0$.

5. Проведите исследование и постройте график функции $y = e^{x^3-3x}$.

6. Найдите решение уравнения $y'' + 4y = 0$, удовлетворяющее условиям $y(0) = 3$ и $y'(0) = -6\sqrt{3}$.

Вариант 4

1. Найдите производную функции $y=3^{4x-x^2}\cdot\cos 2x$.

2. Вычислите $\int\left(2-3x^2\right)e^{2x-x^3}dx$.

3. Найдите точки экстремума функции $f(x)=\ln^4 x-2\ln^2 x+5$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{5}{x-1}$, $y=0$, $x^2-5x+6=0$.

5. Проведите исследование и постройте график функции $y=e^{x^4-2x^2}$.

6. Найдите решение уравнения $y''+9y=0$, удовлетворяющее условиям $y(0)=3\sqrt{3}$ и $y'(0)=-9$.

Вариант 5

1. Найдите производную функции $y=x^{x+1}$.

2. Вычислите $\int\dfrac{(3\ln^2 x+1)^4\ln x}{x}dx$.

3. Определите промежутки монотонности функции $y=4x^2-2\ln(x^4)$.

4. Проведите исследование и постройте график функции $y=(x^2-4x+4)x^{\sqrt{3}}$.

5. Найдите решение уравнения $y'=3y$, удовлетворяющее условию $y^2(0)+2y'(0)+8=0$.

6. Для всех значений параметра a определите число корней уравнения $\ln x=ax$.

Вариант 6

1. Найдите производную функции $y=(x+1)^x$.

2. Вычислите $\int\dfrac{(4\ln^2 x+3)^5\ln x}{x}dx$.

3. Определите промежутки монотонности функции $y=3x^2-\ln(x^6)$.

4. Проведите исследование и постройте график функции $y=(x^2-2x+1)x^{\sqrt{2}}$.

5. Найдите решение уравнения $y'=2y$, удовлетворяющее условию $y^2(0)-2y'(0)-5=0$.

6. Для всех значений параметра a определите число корней уравнения $e^x=ax$.

Урок 68. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы; рассмотреть наиболее типичные ошибки; разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
–	1				
Ø	1				

Обозначения:

\+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными ошибками;

– – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу. Вариант 1, 2 – 8 учеников.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, сделавшими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разбор наиболее трудных вариантов).

III. Ответы и решения

Ответы

Вариант 1

1. *Ответ*: $y' = 2^x(\ln 2 \cdot \sin x + \cos x)$.

2. *Ответ*: $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$.

3. *Ответ*: возрастает на (0; 1] и убывает на [1; ∞).

4. *Ответ*: $11\frac{1}{4}$.

5. *Ответ*: убывает на (–∞; 1], возрастает на [1; ∞); $x_{min} = 1$ и $y_{min} = y(1) = \frac{1}{e}$.

6. *Ответ*: $y = 3e^{-5x}$.

Вариант 2

1. *Ответ*: $y' = 3^x(\ln 3 \cdot \cos x - \sin x)$.

2. *Ответ*: $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$.

3. *Ответ*: возрастает на (0; 1] и убывает на [1; ∞).

4. *Ответ*: $24\frac{4}{5}$.

5. *Ответ*: возрастает на (–∞; 2], убывает на [2; ∞); $x_{max} = 2$ и $y_{max} = y(2) = e^4$.

6. *Ответ*: $y = 7e^{4x}$.

Вариант 3

1. *Ответ*: $y' = 2^{x^3-2x}(\ln 2 \cdot (3x^2 - 2)\sin 3x + 3\cos 3x)$.

2. *Ответ*: $F(x) = e^{2x^3+x} + C$.

3. *Ответ*: $x_{max} = \frac{1}{e}$ и $y_{max} = 9$, $x_{min} = e$ и $y_{min} = 5$.

4. *Ответ*: $6\ln\frac{5}{2}$.

5. *Ответ*: возрастает на (–∞; –1], убывает на [–1; 1]; $x_{max} = -1$ и $y_{max} = e^2$, $x_{min} = 1$ и $y_{min} = \frac{1}{e^2}$.

6. *Ответ*: $y = 6\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Вариант 4

1. *Ответ*: $y' = 3^{4x-x^3}(\ln 3 \cdot (4 - 3x^2)\cos 2x - 2\sin 2x)$.

2. *Ответ*: $F(x) = e^{2x-x^3} + C$.

3. *Ответ*: $x_{min} = \frac{1}{e}$, $x_{min} = e$ и $y_{min} = 4$, $x_{max} = 1$ и $y_{max} = 5$.

4. *Ответ*: $5\ln 2$.

5. *Ответ*: убывает на (–∞; –1] и [0; 1], возрастает на [–1; 0] и [1; ∞); $x_{min} = -1$, $x_{min} = 1$ и $y_{min} = \frac{1}{e}$, $x_{max} = 0$ и $y_{max} = 1$.

6. *Ответ*: $y = 6\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Решения

Вариант 5

1. Используя основное логарифмическое тождество, запишем функцию в виде $y = x^{x+1} = (e^{\ln x})^{x+1} = e^{\ln x\cdot(x+1)}$. Применим правило для дифференцирования сложной функции. Имеем: $y' = e^{\ln x\cdot(x+1)}\cdot(\ln x\cdot(x+1))' =$

$$= x^{x+1}\left(\frac{1}{x}\cdot(x+1)+\ln x\right) = x^x\left(x+1+x\ln x\right).$$

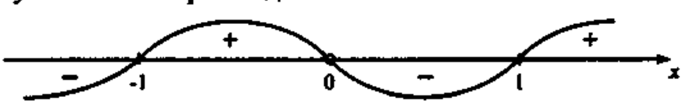
Ответ: $y' = x^x\left(x+1+x\ln x\right)$.

2. Для вычисления интеграла введем новую переменную $t = 3\ln^2 x+1$, тогда $dt = \left(3\ln^2 x+1\right)'dx = \frac{6\ln x}{x}dx$, откуда $\frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{6}dt$.

Получаем: $\int\frac{\left(3\ln^2 x+1\right)^4\ln x}{x}dx = \frac{1}{6}\int t^4dt = \frac{1}{30}t^5 + C = \frac{1}{30}\left(3\ln^2 x+1\right)^5 + C$.

Ответ: $F(x) = \frac{1}{30}\left(3\ln^2 x+1\right)^5 + C$.

3. Область определения функции $D(y) = (-\infty;\,0)\cup(0;\,\infty)$. Найдем производную функцию $y' = 8x - 2\frac{4x^3}{x^4} = \frac{8\left(x^2-1\right)}{x}$. Построим диаграмму знаков этой производной.



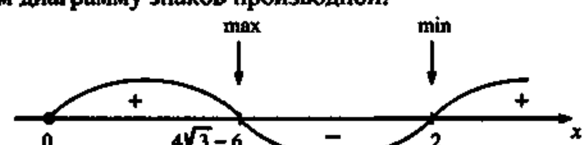
Видно, что функция убывает на промежутках $(-\infty;\,-1]$ и $(0;\,1]$, возрастает на промежутках $[-1;\,0)$ и $[1;\,\infty)$.

Ответ: промежутки убывания $(-\infty;\,-1]$ и $(0;\,1]$, промежутки возрастания $[-1;\,0)$ и $[1;\,\infty)$.

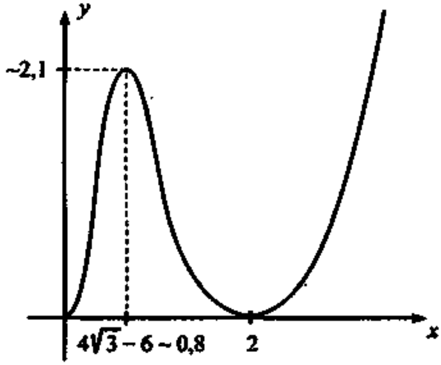
4. Область определения функции $D(y) = [0;\,\infty)$. Запишем функцию в виде $y = (x-2)^2x^{\sqrt{3}}$. Видно, что она обращается в нуль при $x = 0$ и $x = 2$. При всех остальных x значения функции $y > 0$. Найдем производную функции (используя правило дифференцирования произведения функций):

$y' = 2(x-2)x^{\sqrt{3}} + (x-2)^2\cdot\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1} = (x-2)x^{\sqrt{3}-1}(2x+\sqrt{3}x-2\sqrt{3})$.

Построим диаграмму знаков производной.



Видно, что функция имеет максимум в точке $x = \dfrac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - 6 \approx 0{,}8$ и $y_{\max} = (4\sqrt{3}-8)^2 \cdot (4\sqrt{3}-6)^{\sqrt{3}} \approx 2{,}1$, минимум в точке $x = 2$ и $y_{\min} = 0$. Теперь легко построить график данной функции.

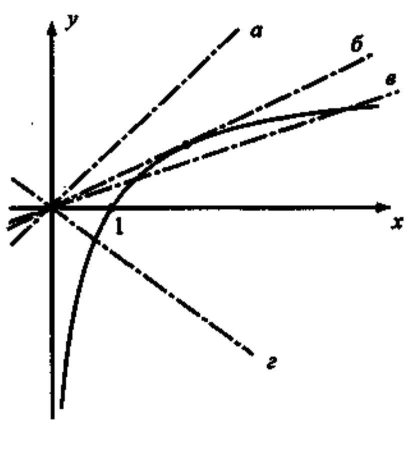


Ответ: см. график.

5. Решением уравнения $y' = 3y$ является функция $y = Ce^{3x}$. Осталось определить постоянную C. Для этого используем условие $y'^2(0) + 2y'(0) + 8 = 0$. Так как $y' = 3Ce^{3x}$, то получаем уравнение $C^2 + 6C + 8 = 0$, корни которого $C_1 = -2$ и $C_2 = -4$. Поэтому таких решений два: $y = -2e^{3x}$ и $y = -4e^{3x}$.

Ответ: $y = -2e^{3x}$ и $y = -4e^{3x}$.

6. Для анализа уравнения $\ln x = ax$ построим графики функций $y_1 = \ln x$ и $y_2 = ax$.



Видно, что в зависимости от параметра *a* уравнение может не иметь корней (случай *а*), иметь один корень (случаи *б* и *г*), иметь два корня (случай *в*). При этом характерной ситуацией является касание графиков y_1 и y_2 (случай *б*). Опишем это касание.

Напишем уравнение касательной к графику функции y_1. Предположим, что касание происходит в точке с абсциссой x_0. Тогда уравнение касательной $y=\frac{1}{x_0}(x-x_0)+\ln x_0$ или $y=\frac{x}{x_0}+\ln x_0-1$. Эта касательная должна совпадать с графиком функции $y_2=ax$. Возникают условия $\begin{cases}\frac{1}{x_0}=a\\ \ln x_0-1=0\end{cases}$. Из второго уравнения находим $x_0=e$, тогда $a=\frac{1}{e}$. Теперь легко ответить на вопрос задачи: при $a\in(-\infty;\,0]\cup\left\{\frac{1}{e}\right\}$ уравнение имеет 1 корень, при $a\in\left(0;\frac{1}{e}\right)$ – 2 корня, при $a\in\left(\frac{1}{e};\,\infty\right)$ – не имеет корней.

Ответ: при $a\in(-\infty;\,0]\cup\left\{\frac{1}{e}\right\}$ – 1, при $a\in\left(0;\frac{1}{e}\right)$ – 2, при $a\in\left(\frac{1}{e};\infty\right)$ – 0.

Вариант 6

1. Используя основное логарифмическое тождество, запишем функцию в виде $y=(x+1)^x=(e^{\ln(x+1)})^x=e^{\ln(x+1)\cdot x}$. Применим правило для дифференцирования сложной функции. Имеем: $y'=e^{\ln(x+1)\cdot x}\cdot(\ln(x+1)\cdot x)'=$

$$=(x+1)^x\cdot\left(\frac{1}{x+1}\cdot x+\ln(x+1)\right)=(x+1)^{x-1}(x+(x+1)\ln(x+1)).$$

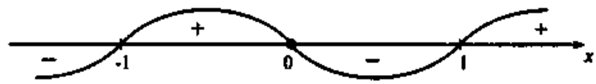
Ответ: $y'=(x+1)^{x-1}(x+(x+1)\ln(x+1))$.

2. Для вычисления интеграла введем новую переменную $t=4\ln^2 x+3$, тогда $dt=\left(4\ln^2 x+3\right)'dx=\frac{8\ln x}{x}dx$, откуда $\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{8}dt$.

Получаем: $\int\frac{\left(4\ln^2 x+3\right)^5\ln x}{x}dx=\frac{1}{8}\int t^5dt=\frac{1}{48}t^6+C=\frac{1}{48}\left(4\ln^2 x+3\right)^6+C$.

Ответ: $F(x)=\frac{1}{48}\left(4\ln^2 x+3\right)^6+C$.

3. Область определения функции $D(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;\,\infty)$. Найдем производную функцию $y'=6x-\frac{1}{x^6}\cdot 6x^5=\frac{6(x^2-1)}{x}$. Построим диаграмму знаков этой производной.

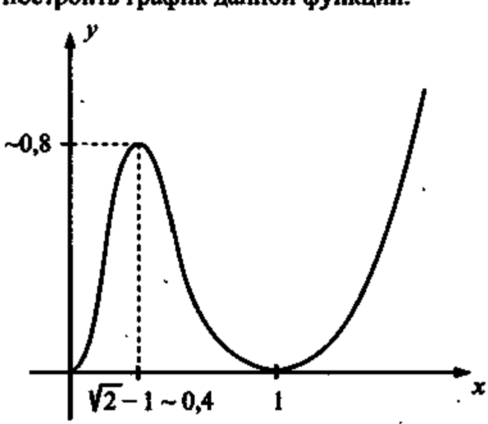


Видно, что функция убывает на промежутках $(-\infty;-1]$ и $(0;\,1]$, возрастает на промежутках $[-1;\,0)$ и $[1;\,\infty)$.

Ответ: промежутки убывания $(-\infty;\,-1]$ и $(0;\,1]$, промежутки возрастания $[-1;\,0)$ и $[1;\,\infty)$.

4. Область определения функции $D(y)=[0;\,\infty)$. Запишем функцию в виде $y=(x-1)^2x^{\sqrt{2}}$. Видно, что она обращается в нуль при $x=0$ и $x=1$. При всех остальных x значения функции $y>0$. Найдем производную функции (используя правило дифференцирования произведения функций): $y'=2(x-1)x^{\sqrt{2}}+(x-1)^2\cdot\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}=(x-1)x^{\sqrt{2}-1}\left(2x+\sqrt{2}x-\sqrt{2}\right)$. Построим диаграмму знаков производной.

Видно, что функция имеет максимум в точке $x=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1\approx 0{,}4$ и $y_{max}=(\sqrt{2}-2)^2(\sqrt{2}-1)^{\sqrt{2}}\approx 0{,}8$, минимум в точке $x=1$ и $y_{min}=0$. Теперь легко построить график данной функции.

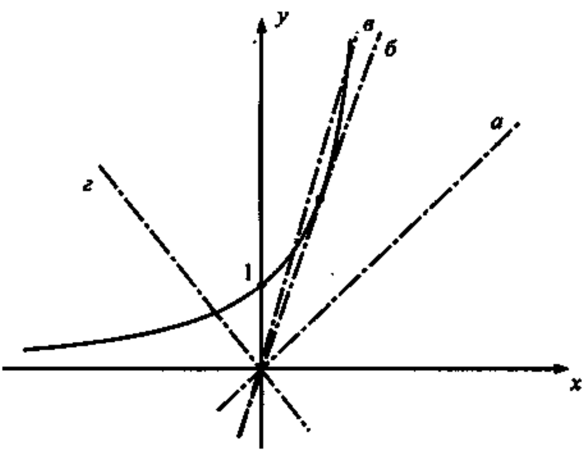


Ответ: см. график.

5. Решением уравнения $y' = 2y$ является функция $y = Ce^{2x}$. Осталось определить постоянную C. Для этого используем условие $y'^2(0) - 2y'(0) - 5 = 0$. Так как $y' = 2Ce^{2x}$, то получаем уравнение $C^2 - 4C + -5 = 0$, корни которого $C_1 = -1$ и $C_2 = 5$. Поэтому таких решений два: $y = -e^{2x}$ и $y = 5e^{2x}$.

Ответ: $y = -e^{2x}$ и $y = 5e^{2x}$.

6. Для анализа уравнения $e^x = ax$ построим графики функций $y_1 = e^x$ и $y_2 = ax$.



Видно, что в зависимости от параметра a уравнение может не иметь корней (случай *а*), иметь один корень (случаи *б* и *г*), иметь два корня (случай *в*). При этом характерной ситуацией является касание графиков y_1 и y_2 (случай *б*). Опишем это касание.

Напишем уравнение касательной к графику функции y_1. Предположим, что касание происходит в точке с абсциссой x_0. Тогда уравнение касательной $y = e^{x_0}(x - x_0) + e^{x_0}$ или $y = e^{x_0} \cdot x + e^{x_0}(1 - x_0)$. Эта касательная должна совпадать с графиком функции $y_2 = ax$. Возникают условия $\begin{cases} e^{x_0} = a \\ e^{x_0}(1 - x_0) = 0 \end{cases}$. Из второго уравнения находим $x_0 = 1$, тогда $a = e$. Теперь легко ответить на вопрос задачи: при $a \in (-\infty; 0) \cup \{e\}$ уравнение имеет 1 корень, при $a \in [0; e)$ – не имеет корней, при $a \in (e; \infty)$ – имеет 2 корня.

Ответ: при $a \in (-\infty; 0) \cup \{e\}$ – 1, при $a \in [0; e)$ – 0, при $a \in (e; \infty)$ – 2.

Уроки 69–70. Зачетная работа по теме «Показательная и логарифмическая функции»

Цель: проверить знания учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи находятся в блоке А, более сложные – в блоке В, еще сложнее – в блоке С. Каждая задача из блока А оценивается в 1 балл, из блока В – в 2 балла, из блока С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы отдельного задания можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

III. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Найдите производную функции $y = e^{\sin x} - \ln^2 x$.

2. Определите первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = 3x^2 - \dfrac{2}{x}$, удовлетворяющую условию $F(1) = 8$.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{3}{x}$, $y = 3$, $x = 5$.

4. Исследуйте на монотонность и экстремумы функцию $f(x) = 3xe^x$.

5. Под каким углом график функции $f(x) = (2x-1)\cdot 4^x$ пересекает ось абсцисс?

6. Вычислите $\int\limits_0^1 \frac{dx}{3-2x}$.

7. Найдите решение уравнения $y' = 7y$, удовлетворяющее условию $y'(0) = 14$.

В

8. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \log_5(4x+1)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

9. Исследуйте на монотонность и экстремумы функцию $f(x) = (x+3)e^{x-1}$.

10. Вычислите $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$.

11. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = 5 - \frac{3}{x^2}$, если уравнение $F(x) = 3$ имеет единственный корень.

С

12. Найдите производную функции $y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$.

13. Вычислите $\int \frac{3x-5}{x^2-4x+3}dx$.

14. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \sqrt{2-x}$ и прямой, проходящей через точки $A(-5; 3)$ и $B(1; 1)$.

Вариант 2

А

1. Найдите производную функции $y = e^{\cos x} + \ln^3 x$.

2. Определите первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = 4x^3 - \frac{3}{x}$, удовлетворяющую условию $F(1) = 5$.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{4}{x}$, $y = 4$, $x = 7$.

4. Исследуйте на монотонность и экстремумы функцию $f(x) = 5xe^{x+2}$.

5. Под каким углом график функции $f(x) = (3x-1)\cdot 8^x$ пересекает ось абсцисс?

6. Вычислите $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4-3x}$.

7. Найдите решение уравнения $y' = 5y$, удовлетворяющее условию $y'(0) = 15$.

B

8. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=\log_4(3x+1)$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

9. Исследуйте на монотонность и экстремумы функцию $f(x)=(x-2)e^{x+3}$.

10. Вычислите $\int\frac{dx}{x^2-4x+3}$.

11. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=3-\frac{2}{x^2}$, если уравнение $F(x)=4$ имеет единственный корень.

C

12. Найдите производную функции $y=(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$.

13. Вычислите $\int\frac{3x-11}{x^2-6x+5}dx$.

14. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sqrt{2x+1}$ и прямой, проходящей через точки $A(2;\,2)$ и $B(4;\,3)$.

Решения

Вариант 1

1. Используем правило дифференцирования сложной функции. Получаем: $y'=e^{\sin x}\cdot(\sin x)'-\ln x\cdot(\ln x)'=e^{\sin x}\cdot\cos x-\frac{2\ln x}{x}$.

Ответ: $y'=e^{\sin x}\cdot\cos x-\frac{2\ln x}{x}$.

2. Для функции $f(x)=3x^2-\frac{2}{x}$ находим общий вид первообразных: $F(x)=x^3-2\ln|x|+C$. Для определения постоянной C учтем условие $F(1)=8$. Получаем уравнение: $8=1-2\ln 1+C$, откуда $C=7$. Искомая первообразная имеет вид $F(x)=x^3-2\ln|x|+7$.

Ответ: $F(x)=x^3-2\ln|x|+7$.

3. Очевидно, что графики функции $y=\frac{3}{x}$ и $y=3$ пересекаются при $x=1$. Тогда площадь данной фигуры $S=\int\limits_1^5\left(3-\frac{3}{x}\right)dx=\left(3x-3\ln|x|\right)\Big|_1^5=$

$=(15-3\ln 5)-(3-3\ln 1)=12-3\ln 5$.

Ответ: $12-3\ln 5$.

4. Найдем производную функции $f'(x)=(3xe^x)'=3(e^x+xe^x)=$ $=3e^x(1+x)$. Очевидно, что знак производной определяется множителем $1 + x$. Поэтому функция $f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; -1]$ и возрастает на промежутке $[-1; \infty)$. В точке $x = -1$ функция имеет минимум $f_{min}=f(-1)=-\dfrac{3}{e}$.

Ответ: промежуток убывания $(-\infty; -1]$, промежуток возрастания $[-1; \infty)$, $x_{min}=-1$, $f_{min}=-\dfrac{3}{e}$.

5. Найдем угловой коэффициент касательной. Для этого вычислим производную $f'(x)=2\cdot 4^x+(2x-1)\cdot 4^x\ln 4$. Очевидно, что график функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в точке $x=\dfrac{1}{2}$. Найдем значение производной в этой точке: $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\cdot 4^{\frac{1}{2}}=4$. Поэтому график функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс под углом arctg4.

Ответ: arctg4.

6. Используя правило интегрирования сложной функции, вычислим: $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{3-2x}=-\dfrac{1}{2}\ln|3-2x|\Big|_0^1=-\dfrac{1}{2}(\ln 1-\ln 3)=\dfrac{1}{2}\ln 3.$

Ответ: $\dfrac{1}{2}\ln 3$.

7. Для уравнения $y' = 7y$ запишем общий вид решений $y = Ce^{7x}$. Для нахождения постоянной C используем условие $y'(0) = 14$. Вычислим $y' = 7Ce^{7x}$ и получим уравнение $14 = 7C$, откуда $C = 2$. Поэтому решение $y = 2e^{7x}$.

Ответ: $y = 2e^{7x}$.

8. Вычислим производную данной функции $f'(x)=\dfrac{4}{(4x+1)\ln 5}$.

Найдем значение производной $f'(x)$ и самой функции $f(x)$ в точке $x_0 = 1$. Получаем: $f'(1)=\dfrac{4}{5\ln 5}$, $f(1)=\log_5 5=1$. Тогда уравнение касательной $y=\dfrac{4}{5\ln 5}(x-1)+1.$

Ответ: $y=\dfrac{4}{5\ln 5}(x-1)+1.$

9. Используя правила дифференцирования произведения функций и сложной функции, найдем производную $f'(x)=(x+3)'e^{x-1}+$ $+(x+3)(e^{x-1})'=e^{x-1}+(x+3)e^{x-1}=(x+4)e^{x-1}$. Очевидно, что знак производной определяется множителем $x+4$. Поэтому функция $f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; -4]$ и возрастает на промежутке $[-4; \infty)$. В точке $x=-4$ функция имеет минимум $f_{\min}=f(-4)=-e^{-5}$.

Ответ: промежуток убывания $(-\infty; -4]$, промежуток возрастания $[-4; \infty)$, $x_{\min}=-4$ и $f_{\min}=-e^{-5}$.

10. Представим подынтегральную функцию в виде суммы двух более простых дробей: $\frac{1}{x^2-6x+5}=\frac{1}{(x-5)(x-1)}=\frac{(x-1)-(x-5)}{4(x-5)(x-1)}=$ $=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-1}\right)$. Теперь легко вычислить интеграл: $\int\frac{dx}{x^2-6x+5}=$ $=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{1}{4}(\ln|x-5|-\ln|x-1|)+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C.$

Ответ: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C.$

11. Для функции $f(x)=5-\frac{3}{x^2}$ напишем общий вид первообразных: $F(x)=5x+\frac{3}{x}+C$. Для нахождения постоянной C используем дополнительное условие. Уравнение $5x+\frac{3}{x}+C=3$ или $5x^2+(C-3)x+3=0$ имеет единственный корень. Тогда дискриминант этого квадратного уравнения $D=(C-3)^2-60=0$, откуда $C=3\pm\sqrt{60}=3\pm2\sqrt{15}$. Итак, искомые первообразные $F(x)=5x+\frac{3}{x}+3\pm2\sqrt{15}.$

Ответ: $F(x)=5x+\frac{3}{x}+3\pm2\sqrt{15}.$

12. Запишем функцию в виде $y=(\operatorname{tg}x)^{\sin x}=(e^{\ln\operatorname{tg}x})^{\sin x}$. Используем правило дифференцирования сложной функции $y'=(e^{\sin x\ln\operatorname{tg}x})'=$

$$= e^{\sin x \ln \operatorname{tg} x} \cdot (\sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x)' = (\operatorname{tg} x)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x + \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right) =$$

$$= (\operatorname{tg} x)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right).$$

Ответ: $y' = (\operatorname{tg} x)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right)$.

13. Используя метод неопределенных коэффициентов, представим подынтегральную функцию в виде суммы двух более простых дробей. Получаем: $\frac{3x-5}{x^2-4x+3} = \frac{3x-5}{(x-1)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3} =$ $= \frac{(a+b)x-(3a+b)}{(x-1)(x-3)}$. Сравнивая исходную дробь с конечной, получаем условия $\begin{cases} a+b=3 \\ -(3a+b)=-5 \end{cases}$. Решение этой системы уравнений $a = 1$ и $b = 2$. Теперь вычислим интеграл: $\int \frac{3x-5}{x^2-4x+3}dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2dx}{x-3} =$ $= \ln|x-1| + 2\ln|x-3| + C$.

Ответ: $\ln|x-1| + 2\ln|x-3| + C$.

14. Прямая имеет вид $y = ax + b$. Так как она проходит через заданные точки A и B, то получаем систему уравнений $\begin{cases} -5a+b=3 \\ a+b=1 \end{cases}$. Ее решение $a = -\frac{1}{3}$ и $b = \frac{4}{3}$. Тогда уравнение прямой $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$. Найдем точки пересечения этой прямой и кривой $y = \sqrt{2-x}$. Получаем уравнение: $-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} = \sqrt{2-x}$, или $4 - x = 3\sqrt{2-x}$, или $16 - 8x + x^2 = 18 - 9x$, или $x^2 + x - 2 = 0$, корни которого $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$. Тогда площадь данной фигуры $S = \int_{-2}^{1} \left(\sqrt{2-x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\right)dx =$

$$= \left(-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{6} - \frac{4}{3}x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{16}{3} + \frac{2}{3} + \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Вариант 2

1. Используем правило дифференцирования сложной функции. Получаем: $y'=e^{\cos x}\cdot(\cos x)'+3\ln^2 x\cdot(\ln x)'=-e^{\cos x}\cdot\sin x+\dfrac{3\ln^2 x}{x}$.

Ответ: $y'=-e^{\cos x}\cdot\sin x+\dfrac{3\ln^2 x}{x}$.

2. Для функции $f(x)=4x^3-\dfrac{3}{x}$ находим общий вид первообразных: $F(x)=x^4-3\ln|x|+C$. Для определения постоянной C учтем условие $F(1)=5$. Получаем уравнение: $5=1-3\ln 1+C$, откуда $C=4$. Искомая первообразная имеет вид $F(x)=x^4-3\ln|x|+4$.

Ответ: $F(x)=x^4-3\ln|x|+4$.

3. Очевидно, что графики функции $y=\dfrac{\sqrt{4}}{x}$ и $y=4$ пересекаются при $x=1$. Тогда площадь данной фигуры $S=\int\limits_1^7\left(4-\dfrac{4}{x}\right)dx=\left(4x-4\ln|x|\right)\Big|_1^7=$
$=(28-4\ln 7)-(4-4\ln 1)=24-4\ln 7$.

Ответ: $24-4\ln 7$.

4. Найдем производную функции $f'(x)=(5xe^{x+2})'=5(e^{x+2}+xe^{x+2})=$ $=5e^{x+2}(1+x)$. Очевидно, что знак производной определяется множителем $1+x$. Поэтому функция $f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty;-1]$ и возрастает на промежутке $[-1;\infty)$. В точке $x=-1$ функция имеет минимум $f_{\min}=f(-1)=-5e$.

Ответ: промежуток убывания $(-\infty;-1]$, промежуток возрастания $[-1;\infty)$, $x_{\min}=-1$, $f_{\min}=-5e$.

5. Найдем угловой коэффициент касательной. Для этого вычислим производную $f'(x)=3\cdot 8^x+(3x-1)\cdot 8^x\ln 8$. Очевидно, что график функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в точке $x=\dfrac{1}{3}$. Найдем значение производной в этой точке: $f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=3\cdot 8^{\frac{1}{3}}=6$. Поэтому график функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс под углом arctg6.

Ответ: arctg6.

6. Используя правило интегрирования сложной функции, вычислим: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4-3x} = -\frac{1}{3}\ln|4-3x|\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}(\ln 1 - \ln 4) = \frac{1}{3}\ln 4.$

Ответ: $\frac{1}{3}\ln 4.$

7. Для уравнения $y' = 5y$ запишем общий вид решений $y = Ce^{5x}$. Для нахождения постоянной C используем условие $y'(0) = 15$. Вычислим $y' = 5Ce^{5x}$ и получим уравнение $15 = 5C$, откуда $C = 3$. Поэтому решение $y = 3e^{5x}$.

Ответ: $y = 3e^{5x}$.

8. Вычислим производную данной функции: $f'(x) = \frac{3}{(3x+1)\ln 4}$. Найдем значение производной $f'(x)$ и самой функции $f(x)$ в точке $x_0 = 1$. Получаем: $f'(1) = \frac{3}{4\ln 4}$, $f(1) = \log_4 4 = 1$. Тогда уравнение касательной $y = \frac{3}{4\ln 4}(x-1)+1.$

Ответ: $y = \frac{3}{4\ln 4}(x-1)+1.$

9. Используя правила дифференцирования произведения функций и сложной функции, найдем производную $f'(x) = (x-2)'e^{x+3} + (x-2)(e^{x+3})' = e^{x+3} + (x-2)e^{x+3} = (x-1)e^{x+3}$. Очевидно, что знак производной определяется множителем $x-1$. Поэтому функция $f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; 1]$ и возрастает на промежутке $[1; \infty)$. В точке $x = 1$ функция имеет минимум $f_{\min} = f(1) = -e^4$.

Ответ: промежуток убывания $(-\infty; 1]$, промежуток возрастания $[1; \infty)$, $x_{\min} = 1$ и $f_{\min} = -e^4$.

10. Представим подынтегральную функцию в виде суммы двух более простых дробей: $\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{1}{(x-3)(x-1)} = \frac{(x-1)-(x-3)}{2(x-3)(x-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\right)$. Теперь легко вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{x^2-4x+3} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}(\ln|x-3| - \ln|x-1|) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| + C.$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| + C.$

11. Для функции $f(x)=3-\frac{2}{x^2}$ напишем общий вид первообразных: $F(x)=3x+\frac{2}{x}+C$. Для нахождения постоянной C используем дополнительное условие. Уравнение $3x+\frac{2}{x}+C=4$ или $3x^2+(C-4)x+2=0$ имеет единственный корень. Тогда дискриминант этого квадратного уравнения $D=(C-4)^2-24=0$, откуда $C=4\pm\sqrt{24}=4\pm2\sqrt{6}$. Итак, искомые первообразные $F(x)=3x+\frac{2}{x}+4\pm2\sqrt{6}$.

Ответ: $F(x)=3x+\frac{2}{x}+4\pm2\sqrt{6}$.

12. Запишем функцию в виде $y=(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}=(e^{\ln\operatorname{ctg}x})^{\sin x}$. Используем правило дифференцирования сложной функции: $y'=(e^{\sin x\ln\operatorname{ctg}x})'=$

$=e^{\sin x\ln\operatorname{ctg}x}\cdot(\sin x\cdot\ln\operatorname{ctg}x)'=(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln\operatorname{ctg}x+\sin x\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg}x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\right)=$

$=(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln\operatorname{ctg}x-\frac{1}{\cos x}\right)$.

Ответ: $y'=(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln\operatorname{ctg}x-\frac{1}{\cos x}\right)$.

13. Используя метод неопределенных коэффициентов, представим подынтегральную функцию в виде суммы двух более простых дробей. Получаем: $\frac{3x-11}{x^2-6x+5}=\frac{3x-11}{(x-1)(x-5)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-5}=$

$=\frac{(a+b)x-(5a+b)}{(x-1)(x-5)}$. Сравнивая исходную дробь с конечной, получаем условия $\begin{cases}a+b=3\\-(5a+b)=-11\end{cases}$. Решение этой системы уравнений $a=2$ и $b=1$. Теперь вычислим интеграл: $\int\frac{3x-11}{x^2-6x+5}dx=\int\frac{2dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x-5}=$

$2\ln|x-1|+|x-5|+C$.

Ответ: $2\ln|x-1|+|x-5|+C$.

14. Прямая имеет вид $y = ax + b$. Так как она проходит через заданные точки A и B, то получаем систему уравнений $\begin{cases}2a+b=2\\4a+b=3\end{cases}$. Ее решение $a=\frac{1}{2}$ и $b = 1$. Тогда уравнение прямой $y=\frac{1}{2}x+1$. Найдем точки пересечения этой прямой и кривой $y=\sqrt{2x+1}$. Получаем уравнение: $\frac{1}{2}x+1=\sqrt{2x+1}$, или $x+2=2\sqrt{2x+1}$, или $x^2+4x+4=8x+4$, или $x^2-4x=0$, корни которого $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$. Тогда площадь данной фигуры $S=\int\limits_0^4\left(\sqrt{2x+1}-\frac{1}{2}x-1\right)dx=\left(\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{4}-x\right)\Bigg|_0^4=$ $=(9-4-4)-\left(\frac{1}{3}-0-0\right)=\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Глава V. Задачи на повторение

Перед сдачей экзамена по математике предусмотрено достаточно обширное **повторение** курса «Алгебра и начала анализа». В рамках данного пособия **нет возможности** подробно изложить материал 7–11-х классов. Поэтому **ограничимся кратким изложением и основными формулами** данной темы. Для более качественной подготовки к экзамену рекомендуем **следующую литературу** (в которой детально приведены основные **положения теории** и рассмотрены наиболее **типичные задачи**):

1. Рурукин А.Н. Математика. Пособие для интенсивной подготовки к выпускному, вступительному экзаменам и ЕГЭ по математике. – М.: ВАКО, 2004.
2. Рурукин А.Н. Пособие для интенсивной подготовки к экзамену по математике. Выпускной, вступительный, ЕГЭ на 5+. – М.: ВАКО, 2006.
3. Рурукин А.Н. Единый государственный экзамен. Математика. Пособие для подготовки. Подробный разбор заданий 2001–2003. – М.: ВАКО, 2003.
4. Рурукин А.Н. Единый государственный экзамен. Математика. Пособие для подготовки. Подробный разбор заданий 2002–2004. – М.: ВАКО, 2004.

§ 1. Действительные числа

Уроки 71–72. Рациональные и иррациональные числа. Проценты. Пропорции

Цель: вспомнить основные понятия, связанные с действительными числами.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение пройденного материала

Натуральные числа – числа, которые используются для счета предметов: 1, 2, 3, 4, …

Деление натурального числа n на натуральное число p ($n \geq p$) с **остатком** состоит в нахождении такого натурального числа k и такого неотрицательного целого числа r ($0 \leq r < p$), что справедливо равенство $n = pk + r$. При этом число p называют **делителем**, k – **частным**, r – **остатком**.

Пример 1

Число 59 при делении на 8 дает остаток 3, так как справедливо равенство: $59 = 8 \cdot 7 + 3$, где 59 – делимое, 8 – делитель, 7 – частное, 3 – остаток.

Если при делении числа n на число p остаток $r = 0$, то число n делится на p **без остатка** (или **нацело**) и $n = pk$ (где k – частное).

Полезно вспомнить основные **признаки делимости** натуральных чисел: на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10.

Простыми числами называются натуральные числа, которые делятся **на 1 и на само себя** (например, 2, 3, 5, 7, 11 и т. д.) Все остальные числа называются **составными** и могут быть **разложены на простые множители** (например, $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7$). Число 1 не относится ни к простым, ни к составным.

Натуральные числа, **не имеющие общих делителей**, называются **взаимно простыми** (например, числа 12 и 35 – взаимно простые, хотя каждое из них число составное).

Натуральное число можно записать в **десятичной системе** счисления.

Пример 2

а) Число $237 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 7$, т. е. число состоит из 2 сотен, 3 десятков и 7 единиц.

б) Число $abc = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$, т. е. число состоит из a сотен, b десятков и c единиц.

К **целым** числам относятся натуральные числа; числа, противоположные натуральным, и число нуль: … $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, …

Числа вида $\frac{m}{n}$ (где n – натуральное число, m – целое число) называются **рациональными**: $-\frac{3}{7}; \frac{4}{2}; \frac{5}{8}; \frac{11}{4}$.

Все остальные числа являются **иррациональными**: $\sqrt{3}$; $2-\sqrt{5}$; tg5°; lg3; e; π; 1,010010001…

Процентом называют $\frac{1}{100}$ данной величины.

Пример 3

а) 1% от 150 кг составляет $\frac{1}{100} \cdot 150 = 1{,}5$ кг.

б) 1% от 1800 км составляет $\frac{1}{100} \cdot 1800 = 18$ км.

Пропорцией называют равенство $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Из этого равенства сразу следует **основное свойство пропорции:** $ad = bc$.

Пример 4

Решим уравнение $\frac{x-2}{2}=\frac{x+1}{x}$.

Используя основное свойство пропорции, сразу получаем уравнение: $x(x-2)=2(x+1)$ или $x^2-4x-2=0$. Корни этого квадратного уравнения $x_{1,2}=2\pm\sqrt{6}$.

III. Задание на уроках

№ 1 (а, г); 2; 3 (б); 8 (г); 9 (в); 17 (г); 18 (а, б); 19 (а, г); 21; 23; 25 (а, г); 26 (б, г).

IV. Задание на дом

№ 1 (б, в); 3 (а); 5; 8 (б); 9 (а); 17 (б); 18 (в, г); 19 (б, в); 22; 24; 25 (б, в); 26 (а, в).

V. Подведение итогов уроков

Урок 73. Прогрессии

Цель: повторить основные свойства прогрессий.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение пройденного материала

Последовательность чисел a_n, **каждый член которой равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом** d (разностью прогрессии), называется **арифметической прогрессией**, т. е. $a_n = a_{n-1} + d$. Например, числа 2, 5, 8, 11, ... образуют арифметическую прогрессию.

Основные свойства арифметической прогрессии:

1) **Формула n-го члена**: член прогрессии a_n выражается через ее первый член a_1, разность d и порядковый номер этого члена n по формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$.

2) **Сумма n – первых членов** прогрессии вычисляется по формулам: $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ или $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$.

3) **Характеристическое свойство**: любой член прогрессии равен полусумме соседних членов $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Последовательность чисел b_n (первый член которой отличен от нуля), в которой **каждый член равен предыдущему, умноженному на одно и то же число** q (q – знаменатель прогрессии, $q \neq 0$), называется **геометрической прогрессией**, т. е. $b_n = b_{n-1} \cdot q$. Например, числа 2, 6, 18, 54, ... образуют геометрическую прогрессию.

Основные свойства геометрической прогрессии:

1) **Формула *n*-го члена**: член прогрессии b_n выражается через ее первый член b_1 и порядковый номер этого члена n по формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

2) **Сумма *n* – первых членов** прогрессии вычисляется по формулам: $S_n = \dfrac{b_{n+1} - b_1}{q-1}$ или $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$.

3) **Характеристическое свойство**: квадрат любого члена равен произведению соседних членов $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Если $|q| < 1$, то прогрессия называется **бесконечно убывающей геометрической прогрессией**. Для нее справедливы свойства и формулы, приведенные ранее. Кроме того, можно вычислить сумму бесконечного числа членов такой прогрессии по формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

III. Задание на уроке

№ 28, 30, 32, 35, 36, 37.

IV. Задание на дом

№ 29, 31, 33, 34, 38, 39, 40.

V. Подведение итогов урока

§ 2. Тождественные преобразования

Уроки 74–75. Преобразования алгебраических выражений, выражений, содержащих радикалы и степени с дробными показателями

Цель: напомнить свойства степеней с действительными показателями, формулы сокращенного умножения.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)

Вариант 1

1. На одной базе хранится 350 т овощей, из них 14% составляет морковь, на другой базе – 250 т овощей, из них 6% – морковь. Какой процент от общего веса овощей на двух базах составляет морковь?

2. Решите уравнение $\frac{2x+3}{x}=\frac{x+2}{x-1}$.

3. В арифметической прогрессии первый член равен 2, седьмой член равен 26. Найдите сумму первых пятнадцати членов прогрессии.

Вариант 2

1. На одной базе хранится 450 т рыбы, из них 16% составляет окунь, на другой базе – 250 т рыбы, из них 8% – окунь. Какой процент от общего веса рыбы на двух базах составляет окунь?

2. Решите уравнение $\frac{3x+2}{x}=\frac{x+3}{x-2}$.

3. В арифметической прогрессии первый член равен 3, девятый член равен 19. Найдите сумму первых двадцати членов прогрессии.

III. Повторение пройденного материала

1. Свойства степеней с действительными показателями

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$; 3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

4) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $a^1 = a$; $a^0 = 1$.

2. Свойства корней

1) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$; 2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; 3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$;

4) $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$; 5) $\sqrt[n]{a^k}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k$; 6) $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$.

3. Модуль числа

$$|a|=\begin{cases}a, \text{ если } a\ge 0\\ -a, \text{ если } a<0\end{cases}.$$

4. Формулы сокращенного умножения

1) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;

2) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

3) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

4) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

5) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

6) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

7) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

5. Разложение многочленов на множители

При разложении многочленов на множители используют следующие приемы:

а) вынесение общего множителя за скобки;

б) группировка членов;

в) использование формул сокращенного умножения;

г) нахождение корней многочлена.

IV. Задание на уроках

№ 41 (а, г); 43 (а, б); 44 (а, в); 45 (а, б); 46 (б); 47 (а); 48 (а, г); 49 (а, в); 50 (б, в); 51 (а, в).

V. Задание на дом

№ 41 (б, в); 43 (в, г); 44 (б, г); 45 (в, г); 46 (г); 47 (в, г); 48 (б, в); 49 (б, г); 50 (а, г); 51 (б, г).

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 76–77. Преобразования тригонометрических выражений

Цель: вспомнить основные формулы тригонометрии.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)

Вариант 1

1. Упростите выражения:

а) $\dfrac{x^2-xy^2+2y^2-4}{x^2+2x+2y^2-y^4}-\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+xy^2-2x-2y^2}$;

б) $\left(\dfrac{x^2}{x^2-y^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^{\frac{1}{2}}}\right):\left(\dfrac{x^2+y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{x^2-y^{\frac{1}{2}}}{x}\right)$.

2. Вычислите: $\sqrt{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7+\sqrt{48}}$.

Вариант 2

1. Упростите выражения:

а) $\dfrac{x^4-y^4}{4x^2-2x+y-y^2}:\dfrac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{2x-y}$;

б) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^2}{y^2}-\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^2}{x^{\frac{1}{2}}}\right):\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-y^2}-\dfrac{y^2}{x^{\frac{1}{2}}+y^2}\right)$.

2. Вычислите: $\sqrt{7+3\sqrt{5}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{45}}$.

III. Повторение пройденного материала

Связь между функциями одного угла

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\qquad \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

Функции суммы и разности углов

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta.$

Преобразование суммы функций в произведение

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2};$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2};$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Преобразование произведения функций в сумму

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$;

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$;

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$.

Функции кратных углов

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

Формулы понижения степени

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$; $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

Приведенные формулы являются базовыми, и их необходимо помнить. Другие, встречающиеся в справочниках, соотношения выводятся из базовых формул, и их запоминать не стоит.

IV. Задание на уроках

№ 51 (а, б); 53 (а, в); 54 (а, г); 55 (а, б); 56 (б, в); 57 (а, в); 58 (а, б); 59 (б); 60 (а); 61.

V. Задание на дом

№ 52 (в, г); 53 (б, г); 54 (б, в); 55 (в, г); 56 (а, г); 57 (б, г); 58 (в, г); 59 (а); 60 (б).

VI. Подведение итогов уроков

Урок 78. Преобразования выражений, содержащих степени и логарифмы

Цель: напомнить основные формулы, связанные со степенями и логарифмами.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)

Вариант 1

1. Вычислите $\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}$.

2. Упростите выражения:

а) $\frac{\cos\alpha - 2\sin 3\alpha - \cos 5\alpha}{\sin 5\alpha - 2\cos 3\alpha - \sin\alpha}$; б) $\frac{\sin(\pi - x)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\operatorname{tg}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\operatorname{tg}(x - \pi)}$.

Вариант 2

1. Вычислите $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}$.

2. Упростите выражения:

а) $\frac{\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$; б) $\frac{\sin(x - \pi)\cos(x + 2\pi)\sin(4\pi - x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\operatorname{ctg}(2\pi - x)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$.

III. Повторение пройденного материала

Основные **свойства степеней** были приведены на предыдущих уроках. Поэтому напомним только **свойства логарифмов**.

Логарифмом числа b по основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b, т. е. $a^{\log_a b} = b$.

Основные свойства логарифмов

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$; 2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;

3) $\log_a x^p = p\log_a x$; 4) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$;

5) $a^{\log_a x} = x$; 6) $\log_a 1 = 0$; 7) $\log_a a = 1$.

IV. Задание на уроке

№ 62 (а, г); 63 (б, г); 64 (а); 65 (б); 66 (а, г); 67 (б); 68 (а); 71.

V. Задание на дом

№ 62 (б, в); 63 (а, в); 64 (б); 65 (а); 66 (б, в); 67 (а); 68 (б); 70.

VI. Подведение итогов урока

§ 3. Функции

Уроки 79–80. Рациональные функции

Цели: напомнить определение и основные свойства функции; рассмотреть рациональные функции.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)

Вариант 1

1. Вычислите $\log_2\sqrt[3]{4\sqrt{8}}$.

2. Упростите выражение $\left(a^{1+\frac{1}{2\log_4 a}}+8^{\frac{1}{3\log_{a^2} 2}}+1\right)^{\frac{1}{2}}$.

3. Прологарифмируйте по основанию 3 выражение $A=27\sqrt[4]{3}a^3b^2$.

Вариант 2

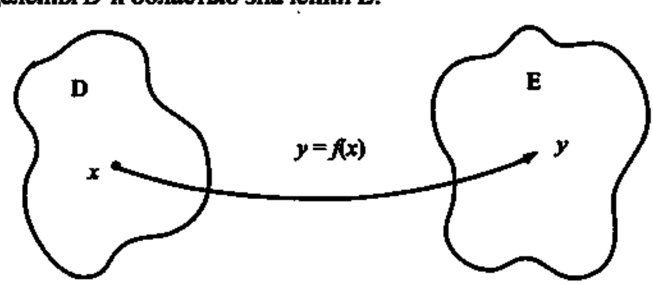
1. Вычислите $\log_3\sqrt[4]{27\sqrt{9}}$.

2. Упростите выражение $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}$.

3. Прологарифмируйте по основанию 2 выражение $A=16\sqrt[4]{8}a^5b^4$.

III. Повторение пройденного материала

Функцией с областью определения D называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу (закону) число y из множества E, зависящее от x. Такое правило (закон) является функцией $y=f(x)$ с областью определения D и областью значений E.



При этом величину x называют **независимой переменной** (или **аргументом функции**), величину y – **зависимой переменной** (или **значением функции**).

Точка пересечения графика функции с осью ординат равна значению функции $y = f(x)$ при $x = 0$, т. е. $y = f(0)$. Точки пересечения графика функции с осью абсцисс (их еще называют **нулями** функции) являются корнями уравнения $f(x) = 0$.

Промежутки знакопостоянства функции – те значения переменной x, при которых функция принимает положительные ($y > 0$) и отрицательные ($y < 0$) значения.

Монотонность – возрастание или убывание функции. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей**, если бóльшему значению аргумента соответствует бóльшее значение функции (т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$). Функция называется **убывающей**, если бóльшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$).

Область определения функции называется **симметричной**, если в нее входит и точка x_0, и точка $(-x_0)$ (т. е. точка, симметричная точке x_0 относительно начала числово́й оси).

Функция называется **четной**, если при изменении знака аргумента значение функции не меняется, т. е. $f(-x) = f(x)$. График четной функции **симметричен относительно оси ординат**. Функция называется **нечетной**, если при изменении знака аргумента значение функции также меняется на противоположное, т. е. $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции **симметричен относительно начала координат**.

Основные виды рациональных функций

а) **Линейная функция** $y = ax + b$ (где a и b – некоторые числа). График функции – прямая линия.

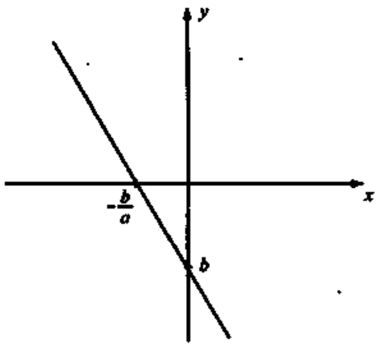
б) **Квадратичная функция** $y = ax^2 + bx + c$ (где a, b, c – некоторые числа). График функции – парабола.

в) **Дробно-линейная функция** $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (где a, b, c, d – некоторые числа). График функции – гипербола.

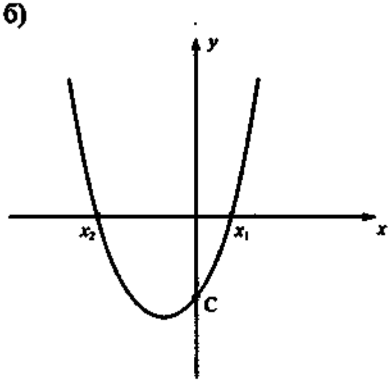
г) **Степенная функция** $y = x^{\alpha}$ (пока будем рассматривать целые значения α ($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$)).

Для некоторых значений чисел a, b, c, d, α приведем графики этих функций.

а)

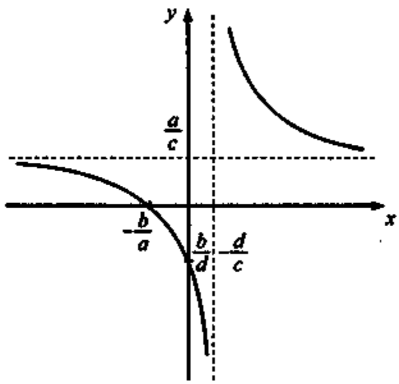


б)



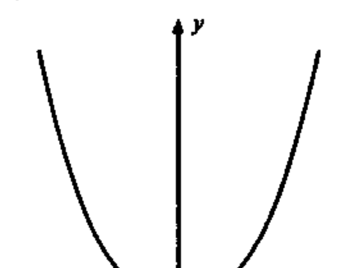
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

в)

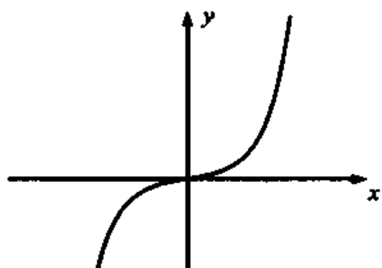


г)

$\alpha > 0$

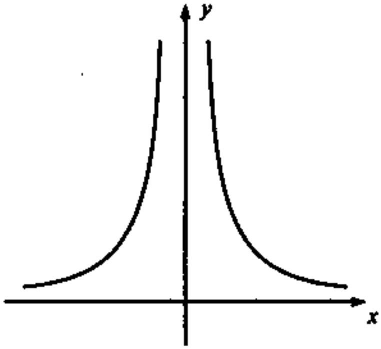


α – чётное

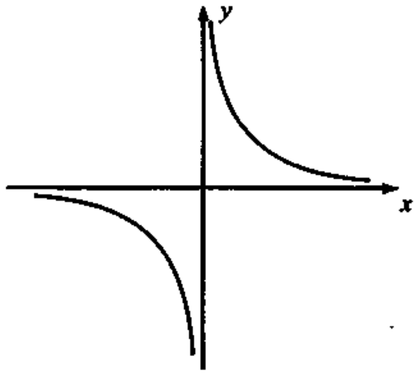


α – нечётное

г) $\alpha < 0$



α – чётное



α – нечётное

IV. Задание на уроках

№ 72 (а); 74 (б); 75; 77 (а); 78 (г); 79 (а, в); 80 (б); 81 (г); 82 (а, г); 83 (б, в); 85 (а, г); 86 (г); 87 (б); 92; 94 (б, в).

V. Задание на дом

№ 72 (б); 84 (а); 76; 77 (в); 78 (а); 79 (б, г); 80 (г); 81 (в); 82 (б, в); 83 (а, г); 85 (б, в); 86 (в); 87 (г); 91; 94 (а, г).

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 81–82. Тригонометрические функции

Цель: вспомнить свойства тригонометрических функций и их графики.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)
Вариант 1

1. Найдите область определения функции $y = \dfrac{3x-5}{2x^2-5x+3}$.

2. Найдите область изменения функции $y = -3x^2 + 6x - 5$.

3. Постройте график функции $y = 2x - 1 + |x - 2|$.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции $y=\dfrac{3-4x}{3x^2-7x+4}$.

2. Найдите область изменения функции $y=-2x^2+8x-7$.

3. Постройте график функции $y=2x+2+|x+4|$.

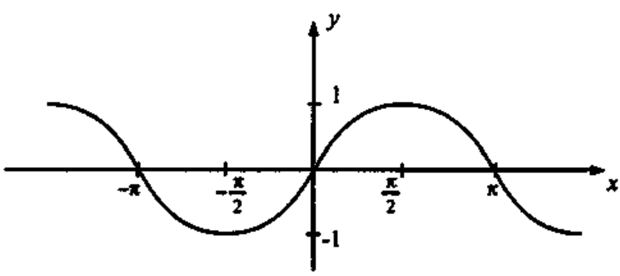
III. Повторение пройденного материала

Прежде всего необходимо помнить области определения и значений, период основных тригонометрических функций.

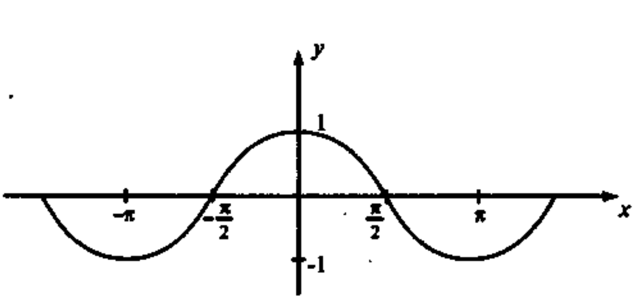
Функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ определены на всей числовой оси, т.е. $D(y)=(-\infty;\infty)$. Область значений этих функций $E(y)=[-1;1]$. Наименьший период функций $T=2\pi$.

Функция $y=\operatorname{tg}x$ определена при всех x, кроме точек $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, где $n\in Z$; функция $y=\operatorname{ctg}x$ определена при всех x, кроме точек $x=\pi n$. Область значений этих функций $E(y)=(-\infty;\infty)$. Наименьший период функций $T=2\pi$.

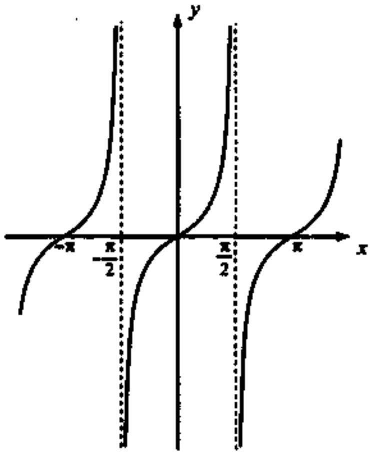
Остальные свойства этих функций видны из приводимых графиков.



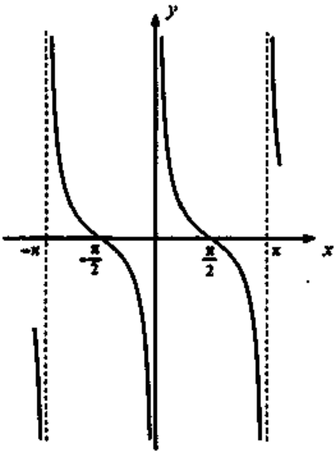
$y=\sin x$



$y=\cos x$



$y = \text{tg}x$



$y = \text{ctg}x$

IV. Задание на уроках

№ 96 (а, б); 97 (б, в); 98 (г); 99 (б); 100 (в); 101 (г); 102 (а, б); 103 (а, б); 104 (а, г); 105 (а, б); 106 (в); 109 (а, в); 110 (а).

V. Задание на дом

№ 96 (в, г); 97 (а, г); 98 (б); 99 (г); 100 (б); 101 (в); 102 (г); 103 (в, г); 104 (б, в); 105 (в, г); 106 (г); 109 (б, ш); 110 (б); 111 (г).

VI. Подведение итогов уроков

Урок 83. Степенная, показательная и логарифмическая функции

Цель: напомнить свойства степенной, показательной и логарифмической функций и их графики.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)
Вариант 1

1. Найдите область определения и область значений $y = \sqrt{\sqrt{3}\sin x - \cos x}$.

2. Расположите числа в порядке возрастания: sin1, sin2, sin3, sin4.

3. Постройте график функции $y = 2\cos x + |\cos x|$.

Вариант 2

1. Найдите область определения и область значений $y=\sqrt{\sin x-\sqrt{3}\cos x}$.

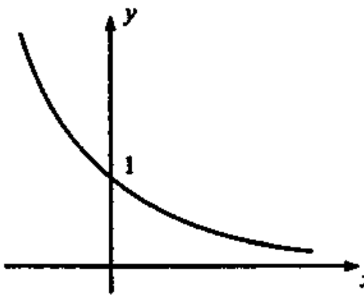
2. Расположите числа в порядке возрастания: cos1, cos2, cos3, cos4.

3. Постройте график функции $y=2\sin x-|\sin x|$.

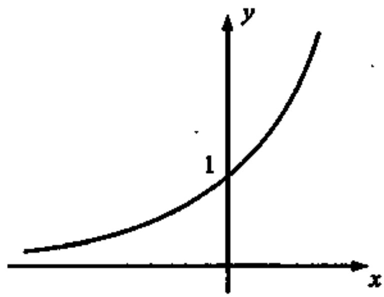
III. Повторение пройденного материала

Показательная функция $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$

Область определения $D(y)=(-\infty;\infty)$, область значений $E(y)=(0;\infty)$. График функции пересекает ось ординат в точке $y = 1$. Функция убывает при $0<a<1$ и возрастает при $a>1$.



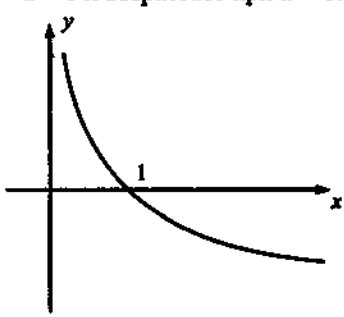
$0<a<1$



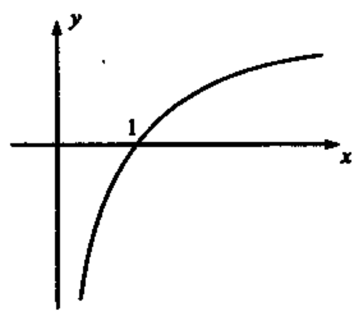
$a>1$

Логарифмическая функция $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$

Область определения $D(y)=(0;\infty)$, область значений $E(y)=(-\infty;\infty)$. График пересекает ось абсцисс в точке $x = 1$. Функция убывает при $0<a<1$ и возрастает при $a>1$.



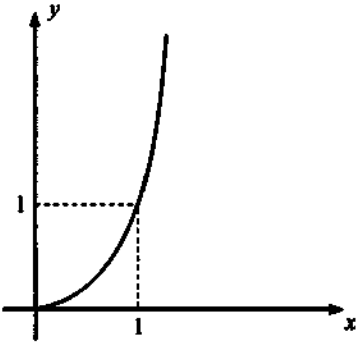
$0<a<1$



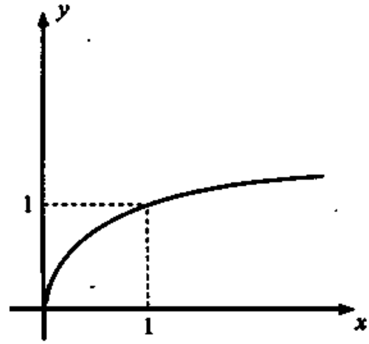
$a>1$

Степенная функция $y = x^{\alpha}$

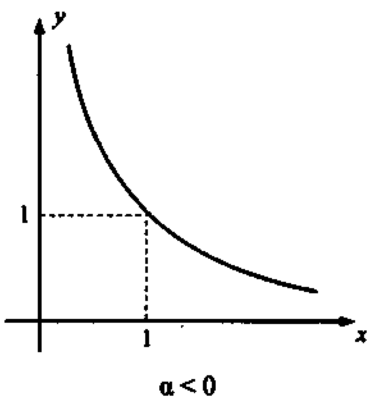
Область определения $D(y) = [0; \infty)$ при $\alpha > 0$ и $D(y) = (0; \infty)$ при $\alpha < 0$, область значений $E(y) = [0; \infty)$ при $\alpha > 0$ и $E(y) = (0; \infty)$ при $\alpha < 0$. Функция возрастает при $\alpha > 0$ и убывает при $\alpha < 0$.



$\alpha > 1$



$0 < \alpha < 1$



$\alpha < 0$

IV. Задание на уроке

№ 112 (а, б); 113 (а, г); 114 (а, в); 115 (б, г); 116 (а, в); 117 (б, в); 118 (а, б); 119 (а, г); 120 (б); 121 (в, г); 123 (а, б); 124 (б, в); 125 (а, г).

V. Задание на дом

№ 112 (г); 113 (б, в); 114 (б, г); 115 (а, в); 116 (г); 117 (а, г); 119 (б, в); 120 (в); 121 (а, б); 123 (в, г); 124 (а, г); 125 (б, в); 126 (в); 127.

VI. Подведение итогов урока

§ 4. Уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств

Урок 84. Рациональные уравнения и неравенства

Цели: повторить решение линейных и квадратных уравнений и неравенств; вспомнить метод интервалов.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)

Вариант 1

1. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\lg^2 x-11\lg x+10}$.
2. Найдите область значений функции $y=2^{x+|x|+2}$.
3. Постройте график функции $y=(x-3)\cdot 5^{\log_5|x|}$.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\log_2^2 x-3\log_2 x+2}$.
2. Найдите область значений функции $y=2^{x-|x|+3}$.
3. Постройте график функции $y=(2-x)\cdot 7^{\log_7|x|}$.

III. Повторение пройденного материала

Линейные уравнения и неравенства $ax+b\vee 0$

Члены соотношения, зависящие от x, группируют в одной части, на зависящие от x, – в другой. Далее решают уравнение или неравенство. При решении неравенств необходимо помнить, что при делении частей неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется, при делении на отрицательное число – знак неравенства меняется на противоположный.

Квадратные уравнения и неравенства $ax^2+bx+c\vee 0$

При решении квадратных уравнений и неравенств важнейшей характеристикой является **дискриминант** $D = b^2 - 4ac$. Для $D < 0$ уравнение корней не имеет, при $D = 0$ имеет один корень $x=-\dfrac{b}{2a}$, при $D > 0$ – два различных корня $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. Для корней x_1 и x_2

квадратного уравнения выполняются формулы Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

При решении квадратных неравенств находят корни соответствующего квадратного уравнения. Затем рассматривают схематично график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ (парабола) или используют метод интервалов.

Метод интервалов – наиболее универсальный и эффективный способ решения неравенств. Находят значения переменной x, при которых данное выражение равно нулю или не существует, и отмечают их на числовой оси. Строят диаграмму знаков выражения. Надо помнить, что при проходе через корень нечетной кратности знак выражения меняется на противоположный, через корень четной кратности – сохраняется. На основании построенной диаграммы выписывают решение неравенства.

IV. Задание на уроке

№ 130 (а, б); 131 (в, г); 132 (б); 133 (г); 134 (а, б); 135 (б, г); 137 (г); 138 (а); 139 (а, г); 140 (в); 141 (г); 142 (в); 143 (а, б); 144 (а, в); 145 (г).

V. Задание на дом

№ 130 (в, г); 131 (а, б); 132 (г); 133 (б); 134 (в); 135 (а, в); 137 (б); 138 (в); 139 (б, в); 140 (г); 141 (в); 142 (г); 143 (в, г); 144 (г); 145 (а, б).

VI. Подведение итогов урока

Урок 85. Иррациональные уравнения и неравенства

Цель: напомнить решение иррациональных уравнений и неравенств.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)

Вариант 1

1. Решите неравенство $\frac{(5-3x)(x+3)}{x^2-3x+2} \geq 0$.

2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $3x^2 - 7x + 1 = 0$.

3. Один из корней уравнения $3ax^2-4x+a=0$ равен 1. Найдите другой корень уравнения и значение a.

Вариант 2

1. Решите неравенство $\frac{x^2-5x+4}{(x+2)(5-4x)}\le 0$.

2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $2x^2-5x+1=0$.

3. Один из корней уравнения $5ax^2-6ax+1=0$ равен 1. Найдите другой корень уравнения и значение a.

III. Повторение пройденного материала

При решении иррациональных уравнений и неравенств необходимо учитывать область допустимых значений (ОДЗ) и область существования решений (ОСР). Для решения используют два основных приема:

а) уединение радикала и возведение в степень;

б) замена переменной.

Помните, что при решении неравенств возводить обе части в четную степень можно только в том случае, когда эти части неотрицательны (подробнее смотрите материал в этом пособии).

IV. Задание на уроке

№ 146 (а); 147 (а, б); 148 (в, г); 149 (б, г); 150 (а, б); 151 (а, г).

V. Задание на дом

№ 146 (в); 147 (в, г); 148 (а, б); 149 (а, в); 150 (в, г); 151 (б, в).

VI. Подведение итогов урока

Урок 86. Тригонометрические уравнения и неравенства

Цель: отработать способы решения тригонометрических уравнений и неравенств.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)
Вариант 1

1. Решите уравнение $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x-2}=2$.

2. Решите неравенство $\sqrt{3x+1}\ge 2x$.

3. Решите неравенство $\frac{\sqrt{2x-7}}{2x^2-5x+3} \le 0$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=4$.

2. Решите неравенство $\sqrt{x+2} \ge 3x-4$.

3. Решите неравенство $\frac{\sqrt{3x-10}}{3x^2-7x+4} \le 0$.

III. Повторение пройденного материала

При решении тригонометрических уравнений и неравенств используются **обратные тригонометрические функции**, определение которых приведено в таблице.

Функция	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\mathrm{arctg}\,x$	$y=\mathrm{arcctg}\,x$
Определение	1) $\sin y = x$ 2) $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	1) $\cos y = x$ 2) $y \in [0; \pi]$	1) $\mathrm{tg}\,y = x$ 2) $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	1) $\mathrm{ctg}\,y = x$ 2) $y \in (0; \pi)$

Пример 1

Вычислим $a=\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.

Используем приведенную таблицу. Пусть угол $\varphi=\arccos\frac{3}{5}$. Это означает, что: 1) $\cos\varphi=\frac{3}{5}$ и 2) $\varphi\in[0;\pi]$. Зная эти сведения, надо найти величину $a=\sin\varphi$. Учитывая основное тригонометрическое тождество, получаем: $\sin\varphi=\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}$. Так как $\varphi\in[0;\pi]$ и $\sin\varphi\ge 0$, то $\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$.

Цель решения тригонометрического уравнения – свести его к одному из четырех простейших, решения которого известны.

Уравнение	**Решения**
$\sin x = a$	$x=(-1)^n\arcsin a+\pi n$ $(\lvert a\rvert\le 1)$
$\cos x = a$	$x=\pm\arccos a+2\pi n$ $(\lvert a\rvert\le 1)$
$\mathrm{tg}\,x = a$	$x=\mathrm{arctg}\,a+\pi n$
$\mathrm{ctg}\,x = a$	$x=\mathrm{arcctg}\,a+\pi n$, где $n\in Z$

Пример 2

Решим уравнение $\sqrt{7}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2$.

Обозначим $t=2x-\frac{\pi}{6}$ и получим уравнение $\sqrt{7}\sin t=2$ или $\sin t=\frac{2}{\sqrt{7}}$ (очевидно, что $\frac{2}{\sqrt{7}}<1$). Выпишем решения этого уравнения: $t=(-1)^n\arcsin\frac{2}{\sqrt{7}}+\pi n$. Вернемся к старой неизвестной и получим линейное уравнение $2x-\frac{\pi}{6}=(-1)^n\arcsin\frac{2}{\sqrt{7}}+\pi n$. Решая это уравнение, найдем: $x=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\cdot(-1)^n\arcsin\frac{2}{\sqrt{7}}+\frac{\pi}{2}n$, где $n\in Z$.

IV. Задание на уроке

№ 152 (а, в); 153 (б, в); 154 (а, б); 155 (а, г); 156 (а, б); 157 (б, в); 158 (а, б); 159 (а, в); 160 (а); 161 (а, г); 162 (б).

V. Задание на дом

№ 152 (б, г); 153 (а, г); 154 (в, г); 155 (б, в); 156 (в, г); 157 (а, г); 158 (в, г); 159 (б, г); 160 (в); 161 (б, в); 162 (г).

VI. Подведение итогов урока

Урок 87. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Цель: вспомнить основные способы решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)
Вариант 1

1. Решите уравнение $\cos^2 x+3\sin x=3$.
2. Решите уравнение $\cos 2x+\sin 10x=0$.
3. Решите неравенство $\frac{2\sin x-\sqrt{3}}{3\cos x+5}\geq 0$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\sin^2 x + 4\cos x = 4$.
2. Решите уравнение $\sin 3x + \cos 7x = 0$.
3. Решите неравенство $\dfrac{2\cos x - 1}{4\sin x + 7} \geq 0$.

III. Повторение пройденного материала

Простейшие показательное и логарифмическое **уравнения** имеют, соответственно, вид $a^{f(x)} = b$ и $\log_a f(x) = b$, где число $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x)$ – некоторая функция от x. Далее логарифмированием и потенцированием такие уравнения приводятся к виду $f(x) = \log_a b$ и $f(x) = a^b$. Так как $\log_a = b$ и a^b – числа, то полученное уравнение, как правило, является алгебраическим и легко решается.

Другая форма записи простейших показательного и логарифмического **уравнения** $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ и $\log f(x) = \log_a g(x)$ также приводит к алгебраическому уравнению $f(x) = g(x)$. Обычно функции $f(x)$ и $g(x)$ несложные и решение полученного уравнения трудностей не вызывает.

При решении показательного и логарифмического неравенств надо учитывать **монотонность** соответствующих функций: для $0 < a < 1$ эти функции убывают, для $a > 1$ – возрастают. Поэтому простейшие неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $\log f(x) > \log_a g(x)$ сводятся к неравенству: $f(x) < g(x)$ в случае $0 < a < 1$ (знак неравенства изменился на противоположный) и $f(x) > g(x)$ в случае $a > 1$ (знак неравенства сохранился).

Более детально решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств изложено в начале этого пособия.

IV. Задание на уроке

№ 163 (в); 164 (а, б); 165 (б); 166 (г); 167 (б); 168 (а, в); 169 (а); 170 (в); 171 (а, б); 172 (б, в); 173 (г); 174 (б); 176 (а, б); 177 (в, г).

V. Задание на дом

№ 163 (б); 164 (в, г); 165 (г); 166 (б); 167 (в); 168 (г); 169 (б); 170 (г); 171 (в, г); 172 (а, г); 173 (в); 174 (а); 175 (а, в); 176 (в, г); 177 (а, б).

VI. Подведение итогов урока

Урок 88. Системы рациональных уравнений и неравенств

Цель: напомнить решение систем рациональных уравнений и линейных неравенств.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)

Вариант 1

1. Решите уравнение $10^x - 5^{x-2}\cdot 2^{x-1} = 980$.
2. Решите уравнение $x^{2+\log_3 x} = 27$.
3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{2x-3}{x+2} > 0$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $6^x - 3^{x-3}\cdot 2^{x-2} = 1284$.
2. Решите уравнение $x^{4+\log_2 x} = 32$.
3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{3x-2}{x+1} > 0$.

III. Повторение пройденного материала

Решение **систем линейных уравнений** трудностей не вызывает. При этом используются способ алгебраического сложения уравнений, способ подстановки, способ сравнения. Если в системе **одно уравнение линейное**, то из него можно выразить одну переменную через другую и использовать способ подстановки.

В случае **системы нелинейных уравнений** необходимо получить одно линейное уравнение. Наиболее типичны системы **симметричных** уравнений и системы **однородных** уравнений.

В симметричной системе уравнения не меняются при замене переменных друг на друга $x \rightleftarrows y$. Для их решения используются новые переменные $a = x + y$ и $b = xy$.

Пример 1

Решим систему уравнений $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$.

Очевидно, что такая система является симметричной, так как переменные x и y входят в нее равноправно. Формально при замене $x \rightleftarrows y$

получаем систему $\begin{cases} y+x+yx=5 \\ y^2+x^2+yx=7 \end{cases}$, которая с точностью до перестановки слагаемых и сомножителей совпадает с исходной.

Введем новые неизвестные $a = x + y$ и $b = xy$. Учтем, что $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-2b$. Тогда система имеет вид $\begin{cases} a+b=5 \\ a^2-b=7 \end{cases}$.

Сложив уравнения системы, получим квадратное уравнение для нахождения a: $a^2+a-12=0$, корни которого $a_1 = -4$ и $a_2 = 3$ (тогда $b_1 = 9$ и $b_2 = 2$). Вернемся к старым неизвестным. Получаем две системы: $\begin{cases} x+y=-4 \\ xy=9 \end{cases}$ (решений нет) и $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ (решения $x_1 = 2, y_1 = 1$ и $x_2 = 1, y_2 = 2$).

Системы уравнений, у которых левая часть одного из уравнений является однородным многочленом, а правая часть равна нулю, или у которых левые части двух уравнений являются однородными многочленами, а правые части равны некоторым числам, называются **однородными системами** уравнений. При решении таких систем из однородного уравнения находят связь между неизвестными.

Пример 2

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21 \\ 2xy-y^2=15 \end{cases}$.

Левые части уравнений представляют собой однородные многочлены второй степени и не равны нулю (так как и правые части не равны нулю). Почленно разделим уравнения друг на друга: $\dfrac{x^2-xy+y^2}{2xy-y^2}=\dfrac{7}{5}$. По свойству пропорции получаем уравнение $5x^2-5xy+5y^2=14xy-7y^2$ или $12y^2-19xy+5x^2=0$. Это уравнение является **однородным**, так как в левой части содержится однородный многочлен второй степени, в правой части – число 0. Решая такое уравнение как квадратное (считая, что y – неизвестная величина, а x – постоянная), получим $y=\dfrac{5}{4}x$ и $y=\dfrac{x}{3}$. Для нахождения x можно использовать любое из уравнений исходной системы, например второе. В случае $y=\dfrac{5}{4}x$ получаем: $2x\cdot\dfrac{5}{4}x-\left(\dfrac{5}{4}x\right)^2=15$ или $x^2 = 16$, откуда $x_1 = -4$, $y_1 = -5$ и $x_2 = 4$, $y_2 = 5$. В случае $y=\dfrac{x}{3}$ имеем:

$2x\cdot\frac{x}{3}-\left(\frac{x}{3}\right)^2=15$ или $x^2=27$, тогда $x_3=-3\sqrt{3}$, $y_3=-\sqrt{3}$ и $x_4=3\sqrt{3}$, $y_4=\sqrt{3}$. Итак, данная система уравнений имеет четыре решения.

При решении **систем линейных неравенств** находится множество решений каждого неравенства. **Пересечение этих множеств** является решением системы неравенств.

IV. Задание на уроке

№ 180 (а, б); 181 (а); 182 (в, г); 183 (г); 184 (а, б); 185 (а, в).

VI. Задание на дом

№ 180 (в); 181 (в, г); 182 (а, б); 183 (б); 184 (в); 185 (б, г).

VI. Подведение итогов урока

Урок 89. Системы иррациональных уравнений. Системы тригонометрических уравнений

Цель: вспомнить решение подобных систем.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)
Вариант 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2y+xy^2=6\\xy+x+y=5\end{cases}$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases}2xy+x^2=2\\3xy+4y^2=22\end{cases}$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases}\dfrac{3x-1}{2}+\dfrac{x-2}{3}\le 7\\\dfrac{2x+1}{5}+\dfrac{x+2}{4}>1\end{cases}$.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^3+y^3=65\\x^2y+xy^2=20\end{cases}$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2+2y^2=17\\x^2-2xy=-3\end{cases}$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{5x-2}{3}+\dfrac{x-1}{2}\le 5 \\ \dfrac{3x-1}{5}+\dfrac{x+1}{4}>1 \end{cases}$.

III. Повторение пройденного материала

При решении систем иррациональных уравнений и систем тригонометрических уравнений в основном используются способ алгебраического сложения, способ подстановки и замена переменных.

IV. Задание на уроке

№ 186 (а, г); 187 (а, в); 188 (а, б); 189 (а, б); 190 (в, г).

V. Задание на дом

№ 186 (б, в); 187 (б, г); 188 (в, г); 189 (в, г); 190 (а, б).

VI. Подведение итогов урока

Урок 90. Системы показательных и логарифмических уравнений

Цель: повторить основные способы решения систем показательных и логарифмических уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)
Вариант 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3\sqrt{x+y}+2\sqrt{x-y}=8 \\ 5\sqrt{x+y}-3\sqrt{x-y}=12 \end{cases}$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} \cos x\cos y=\dfrac{1}{4} \\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=3 \end{cases}$.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5\sqrt{x+2y}-4\sqrt{x-y}=11 \\ 3\sqrt{x+2y}-2\sqrt{x-y}=7 \end{cases}$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x\sin y=\dfrac{3}{4} \\ \operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

III. Повторение пройденного материала

В зависимости от вида и структуры системы показательных или логарифмических уравнений используются в основном следующие способы:

1) сведение к системе алгебраических уравнений;

2) подстановка неизвестного из одного из уравнений;

3) замена переменных.

В результате применения таких подходов задача сводится к решению или алгебраического или показательного (логарифмического) уравнения способами, которые были повторены ранее.

IV. Задание на уроке

№ 191 (а, б); 192 (в, г); 193 (а); 194 (а, б); 195 (в, г); 196 (а, б).

V. Задание на дом

№ 191 (в, г); 192 (а, б); 193 (г); 194 (в, г); 195 (а, б); 196 (в, г).

VI. Подведение итогов урока

Уроки 91–92. Задачи на составление уравнений и систем уравнений

Цель: вспомнить основные типы текстовых задач и способы их решения.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)
Вариант 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x + 4^y = 8 \\ x + y = 3 \end{cases}$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_2(x+2y) + \log_3(x-y) = 3 \\ \log_2^2(x+2y) + \log_3(x-y) = 5 \end{cases}$.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^x + 9^y = 18 \\ x + y = 3 \end{cases}$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\log_2(x+y-1) + \log_3(x-y) = 4 \\ \log_2^2(x+y-1) - \log_3(x-y) = 1 \end{cases}$.

III. Повторение пройденного материала

Текстовые задачи условно разделяются на четыре типа:

1) задачи на движение;

2) задачи на работу и производительность труда;

3) задачи на процентное содержание и концентрацию;

4) задачи на числа.

Успех в решении задач во многом зависит **от удачного выбора неизвестных**, и не всегда удобно выбирать те величины, которые необходимо найти по условию задачи. Как правило, **в качестве неизвестных** выбирают **такие величины**, используя которые **проще** всего **записать условия** задачи в математической форме (т. е. в виде уравнения или системы уравнений).

Можно предложить следующую **схему решения**:

– выбирают удобные для описания условий задачи неизвестные;

– составляют необходимые уравнения или системы уравнений;

– решают полученные уравнения или системы уравнений;

– отбирают подходящие по смыслу задачи решения.

1. Задачи на движение

Обычно в качестве неизвестных выбирают **расстояния** и **скорости** движущихся тел (время в качестве неизвестного выбирается очень редко). Как правило, подобные задачи связаны **со встречами** тел. При движении тел навстречу друг другу они встречаются через время $\frac{S}{v_1+v_2}$ (где S – начальное расстояние между телами, v_1 и v_2 – скорости тел); при движении тел в одну сторону ($v_1 > v_2$) они встречаются через время $\frac{S}{v_1-v_2}$ (первое тело догоняет второе). Эти формулы справедливы и **при движении по прямой, и при движении по окружности**.

2. Задачи на работу и производительность труда

В качестве неизвестных обычно выбирают **работу** и **производительность труда**. Под производительностью труда понимают работу, выполняемую в единицу времени. Этот тип задач очень **похож** на предыдущий, что следует из сходства базовых соотношений: $S = v\cdot t$ и $A = N\cdot t$ (где S – пройденное расстояние, v – скорость движения тела, t – время, A – выполненная работа, N – производительность труда).

3. Задачи на процентное содержание и концентрацию

Напомним, что **процентом** называют **сотую часть** рассматриваемой **величины**. Если в смеси растворов объемом v нас интересует компонент, имеющий объем v_0, то **концентрацией** этого компонента

C_0 называется отношение $\frac{v_0}{v}$, т. е. $C_0 = \frac{v_0}{v}$. Очевидно, что **процентное содержание** $P_0 = \frac{v_0}{v} \cdot 100$ этого компонента в смеси связано простым соотношением с его концентрацией $P_0 = C_0 \cdot 100$.

В качестве неизвестных обычно выбирают **объемы** компонентов смеси или их **концентрации**.

4. Задачи на числа

При решении задач в основном используются: **запись деления** числа **с остатком** и **запись** числа **в десятичной системе** счисления. **Деление натурального числа** n на натуральное число p ($n \geq p$) **с остатком** состоит в нахождении такого натурального числа k и такого неотрицательного целого числа r ($0 \leq r < p$), что выполняется равенство $n = p \cdot k + r$. При этом число n – делимое, p – делитель, k – частное и r – остаток. **Запись числа в десятичной системе** означает **поразрядную** его запись, из которой видно, какое число **единиц, десятков, сотен** и т. д. входит в это число. Например, число $\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$ состоит из a сотен, b десятков и c единиц.

IV. Задание на уроках

№ 197, 199, 202, 205, 208, 210, 212, 214, 216.

V. Задание на дом

№ 198, 201, 203, 204, 206, 209, 211, 213, 215.

VI. Подведение итогов уроков

§ 5. Производная, первообразная, интеграл и их применения

Уроки 93–94. Производная и ее применение

Цель: повторить понятие производной и ее применение для исследования функций.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)

Вариант 1

1. Цену товара снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15%. Затем после пересчета подняли эту цену на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

2. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к искомому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти данное число.

Вариант 2

1. Цену товара повысили на 20%, затем новую цену повысили еще на 10%. Затем после пересчета снизили эту цену на 15%. На сколько процентов всего повысили первоначальную цену товара?

2. Сумма цифр двузначного числа равна 9. Если к искомому числу прибавить 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти данное число.

III. Повторение пройденного материала

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Правила вычисления производных

1) $(u+v)'=u'+v'$;

2) $(u\cdot v)'=u'\cdot v+uv'$;

3) $(Cu)'=C\cdot u'$ (где C – постоянная);

4) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$;

5) $u'(v(x))=u'_v(v)\cdot v'_x(x)$ (производная сложной функции).

Производные основных функций

Функция $f(x)$	C	x^{α}	a^x	e^x	$\log_a x$	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{tg}\,x$	$\mathrm{ctg}\,x$
Производная $f'(x)$	0	$\alpha x^{\alpha-1}$	$a^x\ln a$	e^x	$\dfrac{1}{x\ln a}$	$\dfrac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в его точке с абсциссой x_0 имеет вид: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Геометрический смысл производной: значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $f(x)$, проведенной в точке x_0, т. е. $f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha$.

Физический смысл производной: мгновенная скорость тела в момент времени t_0, т. е. $S'(t_0) = v$ (где S – перемещение тела). Аналогично ускорение тела $a = v'(t_0)$ или $a = S''(t_0)$ (вторая производная перемещения по времени).

При исследовании функций производная используется для нахождения: промежутков монотонности, экстремумов функции, наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

IV. Задание на уроках

№ 219 (а, б); 220 (в); 222 (г); 234; 225; 230 (б); 231 (а); 232 (а, б); 233 (б); 234 (в, г); 236; 242; 247; 258; 261; 265.

V. Задание на дом

№ 219 (в, г); 220 (г); 222 (б); 226; 230 (г); 231 (в); 232 (в, г); 23 (г); 234 (а, б); 237; 243; 246; 252; 259; 262; 266.

VI. Подведение итогов уроков

Урок 95. Первообразная и интеграл, их применения

Цель: вспомнить понятия первообразной и интеграла, их свойства и применение.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)
Вариант 1

1. Найдите производную функции $f(x) = 3\sin^2 x + 2^{4-x} + \sqrt{x}$.

2. Напишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x)=3\sin 2x$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{8}$.

3. Исследуйте функцию $f(x)=x(x-3)^2$ и постройте ее график.

Вариант 2

1. Найдите производную функции $f(x)=2\cos^3 x+3^{5-x}+\sqrt[4]{x}$.

2. Напишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x)=4\cos 3x$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{12}$.

3. Исследуйте функцию $f(x)=x(x+6)^2$ и постройте ее график.

III. Повторение пройденного материала

Функция $F(x)$ называется **первообразной (неопределенным интегралом)** для функции $f(x)$, если выполнено равенство $F'(x)=f(x)$, т. е. $F(x)=\int f(x)dx$.

Правила вычисления первообразных

1. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, $G(x)$ – первообразная для функции $g(x)$, то $F(x)+G(x)$ – первообразная для функции $f(x)+g(x)$.

2. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ и C – постоянная, то $CF(x)$ – первообразная для функции $Cf(x)$.

3. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ и k, b – постоянные, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ – первообразная для функции $f(kx+b)$ $(k\neq 0)$.

Первообразные основных функций

Функция $f(x)$	c	x^{α} $(\alpha\neq -1)$	$\frac{1}{x}$	a^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
Первообразная $F(x)$	cx	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{a^x}{\ln a}$	e^x	$-\cos x$	$\sin x$	$-\mathrm{ctg}\,x$	$\mathrm{tg}\,x$

Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то функция $F(x)+C$ (где C – производная постоянная) также является первообразной для функции $f(x)$. Поэтому **общий вид первообразных** $F(x)+C$.

Понятие **определенного интеграла** приводит к вычислению площади криволинейной трапеции (т. е. фигуры, ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)>0$) $S=\int_a^b f(x)dx$. Справедлива **формула**

Ньютона – Лейбница: $S=\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, где $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$.

IV. Задание на уроке

№ 273 (а, б); 274 (б); 275 (а, б); 276; 278; 281.

V. Задание на дом

№ 273 (в, г); 274 (а); 275 (в, г); 277; 279; 280.

VI. Подведение итогов урока

Уроки 96–97. Итоговая контрольная работа

Цель: проконтролировать знания по всем темам курса по однотипным вариантам.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Проведение контрольной работы

В заключение обучения проводится итоговая контрольная работа. Предлагаются **два одинаковых по сложности варианта**. На наш взгляд, **использование** при подведении итогов **вариантов разной сложности нецелесообразно и некорректно**. В одинаковых условиях проще и этичнее сопоставить результаты и успехи учащихся. При окончательном подведении итогов, разумеется, **необходимо учитывать все результаты обучения** (оценки за контрольные мероприятия, сложность решаемых задач, активность на уроках и т. д.).

III. Критерии оценки работы

Вариант традиционно содержит **шесть задач примерно одинаковой сложности**. Поэтому рекомендуем использовать **те же критерии** при оценке, **что и для вариантов 1 и 2** контрольных работ при текущем обучении. Оценка «5» ставится за пять решенных задач, оценка «4» – за четыре задачи, оценка «3» – за три задачи. Одна задача является резервной и дает некоторую свободу выбора.

IV. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Решите уравнение $2\cos^2(\pi+x)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+1=0$.

2. Решите уравнение $\log_2(1-x)-1=\log_2 4+\log_2(x+2)$.

3. Найдите область определения функции $y=3\log_4(9-x^2)+\sqrt{3\sin x}$.

4. Решите неравенство $\dfrac{\log_{0,5}(1-3x)}{3\cdot 2^{4x}+1}\geq 0$.

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{3}{(x-2)^2}$, $y=x$, $x=4$.

6. Катер прошел по течению реки расстояние от пункта A до пункта B за 5 ч, а от B до A – за 7 ч. За сколько часов проплывет от A до B плот?

Вариант 2

1. Решите уравнение $6\cos^2(\pi-x)-5\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)+2=0$.

2. Решите уравнение $\log_3(2-x)-1=\log_3 5+\log_3(x+4)$.

3. Найдите область определения функции $y=2\log_8(4-x^2)+\sqrt{5\cos x}$.

4. Решите неравенство $\dfrac{\log_{0,2}(1-5x)}{5\cdot 3^{2x}+2}\geq 0$.

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{2}{(x-1)^2}$, $y=x$, $x=3$.

6. Катер прошел по течению реки расстояние от пункта A до пункта B за 7 ч, а от B до A – за 9 ч. За сколько часов проплывет от A до B плот?

Урок 98. Подведение итогов обучения

Цель: ознакомить с результатами обучения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Результаты итоговой контрольной работы

1. Оглашение оценок за контрольную работу.
2. Основные ошибки в задачах.
3. Разбор задач контрольной (вывешен на стенде).

III. Итоги учебного года

1. **Сообщение годовых оценок по алгебре** (похвалить отлично и хорошо успевающих школьников; обратить внимание на слабые

места менее успевающих учеников и дать рекомендации по их преодолению).

2. **Особенности прошедшего учебного года** (отметить темы, усвоенные хорошо, и темы, вызвавшие трудности; обратить внимание не необходимость дальнейшего развития навыков построения графиков функций, решения уравнений и неравенств).

3. **Поздравить с окончанием учебного года и школы.**

IV. Сориентировать на ЕГЭ по математике (детальная беседа о ЕГЭ будет проведена на следующих уроках).

Единый государственный экзамен по математике

Уроки 99–100. Единый государственный экзамен по математике

Цель: рассказать основные положения о ЕГЭ и дать рекомендации по его написанию.

Основные положения

Цель экзамена

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике заменяет собой два экзамена: выпускной (за курс средней школы) и вступительный (в высшие учебные заведения). Выпускной экзамен проверяет знание курса «Алгебра и начала анализа» 10–11 классов, вступительный экзамен – знание и других разделов алгебры, а также курса геометрии (планиметрии и стереометрии). Разумеется, и при решении задач по «Алгебре и началам анализа» используются сведения и знания из курса алгебры предшествующих классов. Сложность задач вступительного экзамена выше, чем выпускного.

Традиции ЕГЭ еще не сложились. Например, за последние годы менялись структура экзаменационной работы, количество заданий, время на выполнение работы, критерии оценок. Поэтому далее приводятся сведения о ЕГЭ по состоянию на последний год.

Заметим, что ситуация с ЕГЭ достаточно сложная: форма проведения экзамена имеет определенные преимущества и недостатки по сравнению с традиционной. Значительное число участников учебного процесса (учащиеся, родители, учителя школ, преподаватели вузов и т. д.) не приемлют ЕГЭ (см. многочисленные публикации, обсуждения на радио и телевидении). Для ряда ведущих вузов страны результаты ЕГЭ носят рекомендательный характер: эти результаты учитываются, но вуз имеет право проводить свои олимпиады, собеседования, экзамены.

Структура экзаменационной работы

Работа содержит 26 заданий, распределенных на 3 части, отличающиеся по назначению, содержанию, сложности, числу заданий и форме ответа.

Часть 1 включает 13 заданий (A1–A10 и B1–B3) базового уровня по алгебре и началам анализа (10–11 классы). Для их выполнения требуются знания основных понятий и сведений. К заданию даны по 4 варианта ответа, из которых только один является верным. В бланке ответов надо указать номер выбранного ответа. В заданиях В1–В3 в бланке ответов надо привести полученный результат.

Часть 2 содержит 10 более сложных заданий по материалу курса «Алгебра и начало анализа» (10–11 классы), а также по другим разделам алгебры (7–9 классы) и по геометрии (планиметрии (7–9 классы) и стереометрии (10–11 классы)). Для их выполнения требуются более глубокие знания и их творческое использование. Как правило, эти задания комбинированные и для их решения необходимы знания нескольких разделов математики сразу. Задания этой части соответствуют и уровню выпускного экзамена, и уровню вступительного экзамена в вузы со средними требованиями по математике. К таким заданиям варианты ответов не приводятся. Учащийся сам должен решить задачу и в бланке ответов записать полученный ответ.

Часть 3 включает 3 самых сложных задания (два по алгебре и одно по геометрии). Эти задания соответствуют сложным алгебраическим и геометрическим заданиям вступительных экзаменов в большинстве вузов. Для выполнения требуются высокий уровень математической подготовки, умения анализировать ситуацию, разрабатывать способ решения, проводить рассуждения, обоснования, доказательства своих действий и грамотно записывать их. При выполнении заданий этой части требуется записать полное решение.

Распределение заданий по содержанию и уровню сложности

По основным блокам содержания школьного курса математики задания распределены следующим образом:

Выражения, их преобразования и вычисления	~20%
Уравнения, неравенства, системы уравнений	~30%
Функции, их свойства и графики	~40%
Геометрия (планиметрия и стереометрия)	~10%

По уровню сложности задания распределены следующим образом (приведен планируемый процент правильных ответов):

Задания части 1	70–90%
Задания части 2	20–60%
Задания части 3:	
первые два алгебраические задания	10–15%
третье алгебраическое задание	1–2%
геометрическое задание	2–3%

Время выполнения работы

На выполнение экзаменационной работы отводится 240 минут (4 часа). При этом планируемое распределение времени: часть 1 ~40 минут, часть 2 ~90 минут, часть 3 ~110 минут.

Система оценки заданий и всей работы

За каждый правильный ответ к заданиям частей 1 и 2 выставляется 1 балл. Проверка ответов выполняется с помощью компьютера.

За выполнение задания части 3 в зависимости от полноты и правильности решения выставляется от 0 до 4 баллов максимально. Задания этой части проверяются экспертной комиссией, в которую входят преподаватели вузов, методисты и опытные учителя.

Таким образом, за выполнение заданий части 1 можно получить максимально 13 баллов, заданий части 2 – 10 баллов и заданий части 3 – 12 баллов.

Оценки за выпускной экзамен выставляются по пятибалльной шкале. При этом задачи, помеченные *, не учитываются.

Для получения отметки «3» достаточно правильно выполнить любые 6 заданий из части 1 или из всей работы.

Для получения отметки «4» достаточно правильно сделать определенное число заданий из частей 1 и 2. Для получения отметки «4» недостаточно верно выполнить даже все задания только части 1.

Для получения отметки «5» необходимо правильно выполнить определенное число заданий из частей 1, 2 и 3. Не требуется решить все задания работы, но среди правильно сделанных заданий должно быть хотя бы одно из части 3. При этом для получения отметки «5» недостаточно верно выполнить даже все задания только части 3.

Вступительный экзамен оценивается суммой баллов, полученных за все выполненные задания. Соответственно эта сумма баллов позволяет претендовать на поступление в тот либо иной вуз.

Общие рекомендации по экзамену

1. Математику надо знать. Чем лучше Вы ее знаете, тем больше баллов сможете набрать и претендовать на более высокую отметку в школе и на более престижный вуз.

2. Выполняйте задания в том порядке, в котором они даны. Задания частей 1 и 2 оцениваются в 1 балл, но задания части 1 существенно проще и не требуют много времени. Кроме того, к этим заданиям приведены варианты ответов и можно или определить правильный ответ, или исключить явно неверные ответы (см. далее).

3. При решении заданий частей 1 и 2 не тратьте время на аккуратность записей и обоснование решений – Ваша задача получить правильный ответ.

4. Для экономии времени пропускайте задание в частях 1, 2, которое не удается выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения заданий частей 1, 2 у Вас останется время, то можно вернуться к пропущенным заданиям.

5. Геометрические задания части 2 (тем более геометрическое задание части 3) делайте в последнюю очередь. Как показывает практика, учащиеся плохо знают геометрию. Этот предмет наиболее сложный в курсе математики. Кроме того, геометрические задания

трудоемки и требуют много времени. Может оказаться, что проще и быстрее сделать некоторые алгебраические задания части 3, чем геометрические задания части 2 (тем более что они оцениваются всего в 1 балл).

6. После заданий части 1 и алгебраических заданий части 2 приступайте к первым двум алгебраическим заданиям части 3 (они более простые). Обратите внимание на обоснованность и доказательность решений, грамотность записи решения. От этого существенно зависит оценка. Даже при неверном ответе и негрубых ошибках возможно получение ненулевого балла.

7. Затем попробуйте сделать геометрические задания части 2, если осталось время. Эти задания все-таки не самые сложные. Обратите внимание на чертеж – грамотный чертеж в геометрической задаче существенно облегчает ее решение.

8. В оставшееся время переходите к решению самых сложных заданий части 3. Здесь Вам понадобятся все умение и навыки, творческий нестандартный подход к задаче. Даже если Вы до конца не решите задачу, то сделанные этапы задания будут оценены. Пугаться этих заданий не следует – они базируются на более простых и известных задачах. Обращайте внимание на обоснованность решений в этих заданиях.

9. Контролируйте время на выполнение заданий: на часть 1 ~15% времени, на часть 2 ~40% и на часть 3 ~45%. Не зацикливайтесь на нерешенной задаче – лучше ее пропустить.

10. Помните, что в заданиях частей 2, 3 ответом является целое число. Если Вы получили другой ответ, быстро проверьте ход решения и математические выкладки.

СОВЕТЫ ПО ПРОВЕРКЕ ОТВЕТОВ ЧАСТИ 1

В заданиях части 1 надо выбирать правильный ответ из 4 возможных вариантов. Рассмотрим приемы, которые позволяют или определить правильный ответ, или исключить явно неверные ответы. Проиллюстрируем эти приемы примерами из вариантов ЕГЭ.

1. Способ контрольных точек

Ответ проверяется для нескольких (наиболее простых) значений переменных. Способ применяется в преобразованиях выражений, при решении неравенства и т. д.

Пример 1

Надо упростить выражение $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}+2y^{\frac{1}{2}}$. Даны варианты ответов:

1) $x^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{2}}$; 2) $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$; 3) $x^{\frac{1}{2}}$; 4) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$.

Видно, что первый член $x^{\frac{1}{2}}$ в ответах одинаковый и различие состоит во втором члене (либо в его отсутствии). Поэтому возьмем, например, $x = 0$ и $y = 1$ и подставим в данное выражение. Получаем: $\frac{0-1}{0^{\frac{1}{2}}+1^{\frac{1}{2}}}+2\cdot 1^{\frac{1}{2}}=\frac{-1}{1}+2\cdot 1=-1+2=1$. Также подставим эти значения x и y в ответы: 1) $0^{\frac{1}{2}}+3\cdot 1^{\frac{1}{2}}=3\cdot 1=3$; 2) $0^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}=-1$; 3) $0^{\frac{1}{2}}=0$; 4) $0^{\frac{1}{2}}+1^{\frac{1}{2}}=1$. Сравнение сразу дает правильный **ответ 4)**.

Пример 2

Надо упростить выражение $\sin(\pi-\alpha)+\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$. Даны варианты ответов: 1) $2\cos\alpha$, 2) $\sin\alpha$, 3) $\cos\alpha$, 4) $2\sin\alpha+\cos\alpha$.

Возьмем самое простое значение $\alpha = 0$ и подставим в данное выражение. Получаем: $\sin\pi+\frac{\cos 0}{\cos 0+\sin 0}=0+\frac{1}{1+0}=1$. Также подставим $\alpha = 0$ в ответы: 1) $2\cos 0 = 2\cdot 1 = 2$; 2) $\sin 0 = 0$; 3) $\cos 0 = 1$; 4) $2\sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$. Видно, что ответы 1 и 2 сразу отпадают. Надо дополнительно проверить ответы 3 и 4.

Возьмем еще одно значение $\alpha=\frac{\pi}{2}$ и подставим в данное выражение. Имеем: $\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\cos\pi}{\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}}=1+\frac{-1}{0+1}=1-1=0$. Также подставим $\alpha=\frac{\pi}{2}$ в ответы 3 и 4. Получаем: 3) $\cos\frac{\pi}{2}=0$ и 4) $2\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=2\cdot 1=2$. Сравнение показывает, что правильный **ответ 3)**.

Заметим, что можно и сразу выбрать правильный ответ, выбрав, например, значение $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Однако вычисления при этом более громоздки.

Подставим эту величину в данное выражение: $\sin\frac{5\pi}{6}+\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}}=$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Также подставим значение $\alpha = \frac{\pi}{6}$ в ответы: 1) $2\cos\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$;

2) $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; 3) $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Из сравнения находим правильный ответ 3).

Пример 3

Требуется найти область определения функции $y = \sqrt{5^{2x-3} - 1}$. Приводятся ответы: 1) (1,5; +∞); 2) (2; +∞); 3) [1,5; +∞); 4) [5; +∞).

Данные промежутки, отличаются, например точкой $x = 1,5$. При $x = 1,5$ найдем значение функции $y = \sqrt{5^{2\cdot 1,5-3} - 1} = \sqrt{5^0 - 1} = \sqrt{1-1} = 0$. Так как в этой точке можно вычислить значение функции, то в такой точке функция определена (т. е. существует). Точка $x = 1,5$ содержит только промежуток [1,5 +∞). Следовательно, правильный ответ 3).

Пример 4

Надо решить неравенство $\log_{0,5}(2 - 0,5x) \geq -1$. Даны ответы: 1) [0; 4); 2) (–∞; 0]; 3) (4; +∞); 4) (4; 6].

Ответы 1, 2 отличаются от 3, 4, например значением $x = 5$. При этом значении аргумент логарифма $2 - 0,5x = 2 - 0,5\cdot 5 = -0,5 < 0$ и логарифм не определен (не существует). Поэтому ответы 3 и 4 сразу отпадают. Ответы 1 и 2 отличаются значением $x = 2$. При $x = 2$ найдем $\log_{0,5}(2 - 0,5\cdot 2) = \log_{0,5} 1 = 0 \geq -1$ (верное неравенство). Правильный ответ 1).

2. Способ граничных точек

При решении неравенств (или задач, связанных с неравенствами) ответы могут различаться граничными точками промежутков. Поэтому проверку надо начинать именно с этих точек. Способ очень похож на предыдущий.

Пример 5

Требуется решить неравенство $5^{2-3x} - 1 \geq 0$. Приводятся ответы: 1) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$; 2) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$; 3) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 4) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Прежде всего видно, что промежутки отличаются границей $x = \frac{2}{3}$.

Подставим значение $x = \frac{2}{3}$ в данное неравенство: $5^{2-3x} - 1 = 5^{2-3\frac{2}{3}} - 1 =$ $= 5^{2-2} - 1 = 5^0 - 1 = 1 - 1 \geq 0$ (верное неравенство). Поэтому промежутки 1 и 3, не содержащие этой точки, не подходят. Далее используем способ контрольных точек. Возьмем точку $x = 0$, входящую в промежуток 2 и не входящую в промежуток 4. При $x = 0$ неравенство принимает вид: $5^{2-3\cdot 0} - 1 = 5^2 - 1 = 25 - 1 = 24 \geq 0$ (верное неравенство). Поэтому правильный **ответ 2)**.

Пример 6

Надо найти область определения функции $y = \log_{0,3}(x - x^2)$. Даны ответы: 1) $[0; 1]$; 2) $(0; 1)$; 3) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Видно, что ответы 1 и 4 отличаются от остальных тем, что содержат точки $x = 0$ и $x = 1$. Легко проверить, что в этих точках выражение $x - x^2$ равно нулю и логарифм не определен. Поэтому ответы 2 и 4 сразу отпадают. Используем способ контрольных точек. Промежутки 2 и 3 отличаются, например, значением $x = 2$. При $x = 2$ получаем: $x - x^2 = 2 - 2^2 = 2 - 4 = -2 < 0$ и логарифм также не определен. Поэтому правильный **ответ 2)**.

Пример 7

Требуется найти область определения функции $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2x-12}}$. Приведены ответы: 1) $[0; 6)$; 2) $(-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$; 3) $[0; 6]$; 4) $(-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$.

Очевидно, что на нуль делить нельзя (т. е. $2x - 12 \neq 0$ или $x \neq 6$). Поэтому промежутки 2 и 3, содержащие точку $x = 6$, сразу отпадают. Из промежутка 1 возьмем, например, точку $x = 3$. При $x = 3$ выражение $\dfrac{x}{2x-12} = \dfrac{3}{2\cdot 3-12} < 0$ и данная функция не определена. Значит, правильный **ответ 4)**.

3. Способ оценки величин

В ряде случаев удается оценить величины, входящие в задачу, и выбрать правильный ответ.

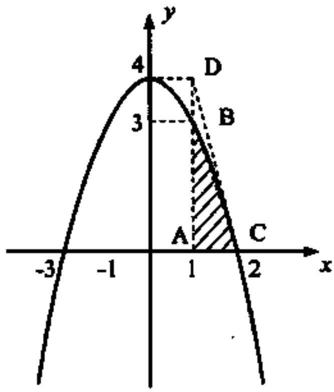
Пример 8

Надо упростить выражение $2^{1+\log_2 6}$. Даны ответы: 1) 12; 2) 8; 3) 24; 4) 7.

Сначала оценим показатель степени. Очевидно, что $4 < 6 < 8$, поэтому $\log_2 4 < \log_2 6 < \log_2 8$ или $2 < \log_2 6 < 3$. Прибавим ко всем частям неравенства число 1 и получим: $3 < 1 + \log_2 6 < 4$. Теперь можно оценить и данное выражение: $2^3 < 2^{1+\log_2 6} < 2^4$ или $8 < 2^{1+\log_2 6} < 16$. Таким образом, правильный ответ должен лежать в диапазоне $8 \div 16$. Видно, что подходит только **ответ 1)**.

Пример 9

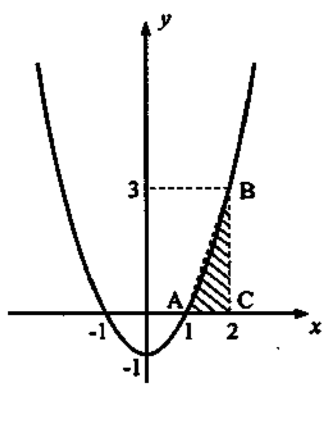
Требуется найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 1$. Приведены ответы: 1) $2\frac{1}{3}$; 2) $1\frac{2}{3}$; 3) $2\frac{2}{3}$; 4) $1\frac{1}{3}$.



Из рисунка видно: искомая площадь S ограничена снизу площадью прямоугольного ΔABC ($S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2}$), сверху – площадью прямоугольного ΔADC ($S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$). Получаем: $S_{\Delta ABC} < S < S_{\Delta ADC}$, или $\frac{3}{2} < S < 2$, или $1{,}5 < S < 2$. В этот промежуток попадает только значение $1\frac{2}{3}$. Поэтому правильный ответ 2).

Пример 10

Надо найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 2$. Приведены ответы: 1) $1\frac{2}{3}$; 2) $1\frac{1}{3}$; 3) $2\frac{2}{3}$; 4) $2\frac{1}{3}$.



Из рисунка видно, что искомая площадь меньше площади прямоугольного ΔABC, т. е. $S < S_{\Delta ABC}$. Площадь этого треугольника $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2} = 1{,}5$. Поэтому получаем: $S < 1{,}5$. Этому условию удовлетворяет только **ответ 2)**.

4. Способ проверки ответов

Иногда, используя условия задачи, можно сразу проверить ответ.

Пример 11

Для функции $f(x) = x^2 - x$ надо указать первообразную, график которой проходит через точку $M(-3;\ 0)$. Даны ответы: 1) $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 13{,}5$; 2) $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 13{,}5$; 3) $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 4{,}5$; 4) $F(x) = x^3 - x^2 - 36$.

Так как график первообразной $F(x)$ проходит через заданную точку M, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению первообразной. Поэтому можно сразу проверить ответы, подставив значение $x = -3$. Получаем:

1) $F(-3) = \frac{(-3)^3}{3} + \frac{(-3)^2}{2} - 13{,}5 = -9 + 4{,}5 - 13{,}5 = -18$;

2) $F(-3) = \frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2} + 13{,}5 = -9 - 4{,}5 + 13{,}5 = 0$;

3) $F(-3) = \frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2} - 4{,}5 = -9 - 4{,}5 - 4{,}5 = -18$;

4) $F(-3) = (-3)^3 - (-3)^2 - 36 = -27 - 9 - 36 = -72$. Видно, что только для функции 2) $F(-3) = 0$. Поэтому такая функция проходит через данную точку $M(-3;\ 0)$. Итак, правильный **ответ 2)**.

Пример 12

Требуется найти корень уравнения $\sin 2x - 4\cos x = 0$, принадлежащий отрезку $[2\pi;\ 3\pi]$. Приведены ответы: 1) $\frac{7\pi}{3}$; 2) $\frac{5\pi}{2}$; 3) $\frac{9\pi}{4}$; 4) $\frac{13\pi}{6}$.

Все приведенные значения принадлежат отрезку $[2\pi;\ 3\pi]$. Проверим эти значения, подставив их в данное уравнение.

1) При $x = \frac{7\pi}{3}$ получаем: $\sin\frac{14\pi}{3} - 4\cos\frac{7\pi}{3} = \sin\left(4\pi + \frac{2\pi}{3}\right) - 4\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} - 4\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \neq 0$.

2) Для $x=\frac{5\pi}{2}$ имеем: $\sin 5\pi-4\cos\frac{5\pi}{3}=\sin(4\pi+\pi)-4\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=$ $=\sin\pi-4\cos\frac{\pi}{2}=0-4\cdot 0=0.$

3) При $x=\frac{9\pi}{4}$ получаем: $\sin\frac{9\pi}{2}-4\cos\frac{9\pi}{4}=\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)-4\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=$ $=\sin\frac{\pi}{2}-4\cos\frac{\pi}{4}=1-4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1-2\sqrt{2}\neq 0.$

4) Для $x=\frac{13\pi}{6}$ имеем: $\sin\frac{13\pi}{3}-4\cos\frac{13\pi}{6}=\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)-4\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=$ $=\sin\frac{\pi}{3}-4\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-4\frac{\sqrt{3}}{2}=-3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 0.$

Видно, что только $x=\frac{5\pi}{2}$ удовлетворяет данному уравнению. Поэтому правильный **ответ 2)**.

5. Способ обратной задачи

Нахождение первообразных обычно сложнее вычисления производных. Поэтому правильность приведенных первообразных можно контролировать нахождением производных.

Пример 13

Надо указать первообразную функции $f(x)=2-\sin x$. Даны ответы: 1) $F(x)=2x-\cos x$; 2) $F(x)=x^2+\cos x$; 3) $F(x)=2x+\cos x$; 4) $F(x)=2+\cos x$.

Найдем производные функций, приведенных в ответах:

1) $F'(x)=(2x-\cos x)'=2-(-\sin x)=2+\sin x$;

2) $F'(x)=(x^2+\cos x)'=2x-\sin x$;

3) $F'(x)=(2x+\cos x)'=2-\sin x$;

4) $F'(x)=(2+\cos x)'=0-\sin x=-\sin x$.

Видно, что только в случае 3) $F'(x)=f(x)$. Поэтому функция $F(x)=2x+\cos x$ является по определению первообразной функции $f(x)=2-\sin x$. Итак, правильный **ответ 3)**.

Пример 14

Для функции $y = 2\cos x$ требуется найти первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{2}; 24\right)$. Приведены ответы: 1) $Y=2\sin x+24$; 2) $Y=2\sin x+22$; 3) $Y=-2\sin x+26$; 4) $Y=2\cos x+22$.

Сначала найдем производные функций Y и получим:

1) $Y' = (2\sin x + 24)' = 2\cos x$;

2) $Y' = (2\sin x + 22)' = 2\cos x$;

3) $Y' = (-2\sin x + 26)' = -2\cos x$;

4) $Y' = (2\cos x + 22)' = -2\sin x$.

Видно, что $Y' = y$ только в случаях 1 и 2. Поэтому варианты 3 и 4 сразу отпадают. Так как график первообразной проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{2}; 24\right)$, то найдем значения функций Y при $x = \frac{\pi}{2}$ в случаях 1 и 2. Получаем:

1) $Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} + 24 = 2\cdot 1 + 24 = 26$ и

2) $Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} + 22 = 2\cdot 1 + 22 = 24$. Видно, что только график функции $Y = 2\sin x + 22$ проходит через заданную точку M. Поэтому правильный ответ 2).

6. Другие способы

В простейших случаях можно использовать соображения, основанные на обычном здравом смысле и очень поверхностном знании математики.

Пример 15

Надо указать промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\log_a(x+1) = \log_a(3x)$. Даны ответы: 1) $(-\infty; -1)$; 2) $(-1; 0)$; 3) $[-1; 0]$; 4) $(0; +\infty)$.

Функция логарифма определена только для положительного аргумента. Поэтому выражение $3x > 0$, откуда $x > 0$. Этому условию удовлетворяет только промежуток 4. Итак, правильный ответ 4).

Из приведенных примеров видно, что простые приемы позволяют найти правильные ответы многих заданий части 1, не решая их. Для решения задач нужны определенные знания и способы решения, из-

ложенные в последней части этого пособия. Поэтому в случае затруднений с заданиями частей 1–3 рекомендуем Вам ознакомиться с ее материалами.

Уроки 101–102. Демонстрационный вариант ЕГЭ

Цели: дать представление о структуре и сложности варианта, разобрать его и отметить его особенности.

Сначала целиком приведем задания варианта, а затем его решение.

Вариант

Часть 1

При выполнении заданий А1–А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «×» в клеточку, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Найдите значение выражения $\frac{5^{-0,5}}{5^{-3,5}}$.

1) 25; 2) 0,02; 3) 125; 4) 5.

А2. Вычислите $\frac{\sqrt[3]{784}\cdot\sqrt[3]{28}}{7}$.

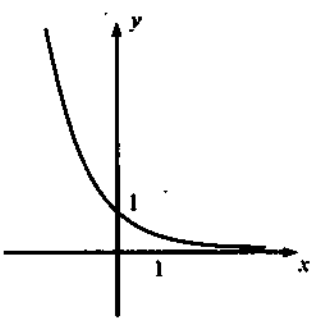
1) 4; 2) 14; 3) 28; 4) $\frac{3}{7}$.

А3. Найдите значение выражения $\log_9\frac{b^6}{729}$, если $\log_9 b = 0,3$.

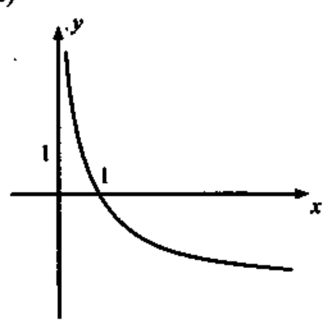
1) 4,8; 2) −1,2; 3) −4,8; 4) 1,2.

А4. На одном из рисунков изображен график функции $y = \log_2 x$. Укажите этот рисунок.

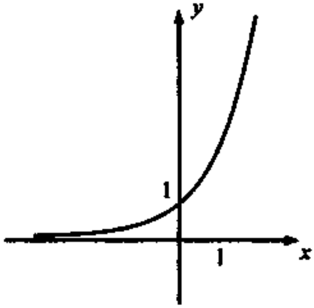
1)



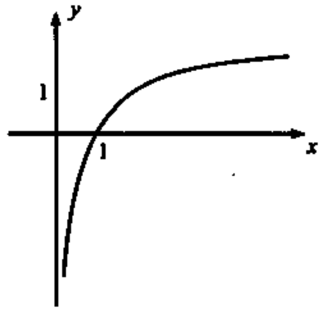
2)



3)



4)



А5. Найдите производную функции $y=(9-x)\ln x$.

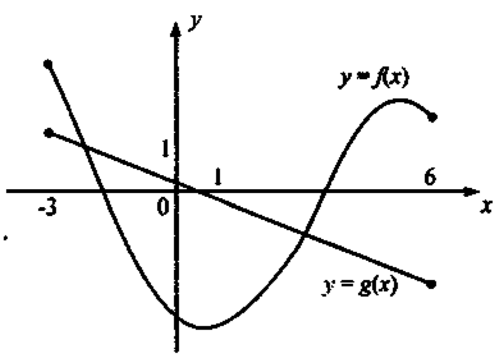
1) $y'=\ln x+\frac{9-x}{x}$; 3) $y'=\ln x-\frac{9-x}{x}$;

2) $y'=-\ln x+\frac{9-x}{x}$; 4) $y'=-\ln x-\frac{9-x}{x}$.

А6. Укажите множество значений функции $y=-\cos 6x-18$.

1) $(-19;-17)$; 2) $[6; 18]$; 3) $(6; 18)$; 4) $[-19;-17]$.

А7. На рисунке изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданные на промежутке $[-3; 6]$. Укажите все значения x, для которых выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$.



1) $[-3;-2]\cup[3;6]$; 2) $[-2; 6]$; 3) $[-3;0]\cup[3;6]$; 4) $[-2; 3]$.

А8. Найдите область определения функции $f(x)=\frac{52}{\sqrt[10]{2-\log_3 x}}$.

1) $(0; 9)$; 2) $[0; 9)$; 3) $[0; 9]$; 4) $(-\infty; 9)$.

А9. Укажите множество решений неравенства
$\log_{\frac{3}{2}}(5-x)\le\log_{\frac{3}{2}}(3x-11)$.

1) (0; 5]; 2) [4; 5]; 3) (0; 4] ; 4) [2; 4).

А10. Решите уравнение $\sqrt{2}-2\cos\frac{x}{12}=0$.

1) $\pm3\pi+24\pi n,\ n\in Z$;

2) $3\pi+24\pi n,\ n\in Z$;

3) $\pm\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{6},\ n\in Z$;

4) $\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{6},\ n\in Z$.

Ответом на задание В1–В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке строго по образцу из верхней части бланка. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Решите уравнение $3\cdot10^{\lg x}=x+10$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов укажите наибольший из корней.)

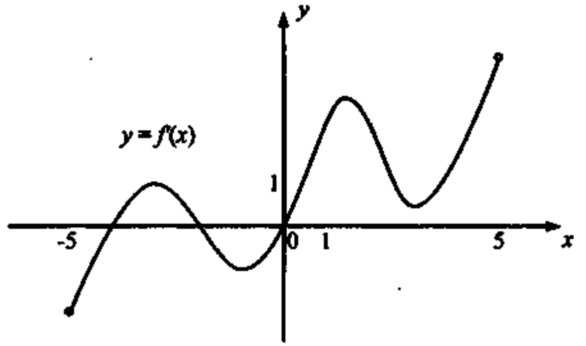
В2. Найдите значение выражения $10\sin(2\pi-\alpha)-7\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)$, если $\sin\alpha=-0{,}2$.

В3. Найдите наименьший корень уравнения
$x\sqrt{3x-x^2}=-\sqrt{3x-x^2}$.

Часть 2

В4. Найдите значение выражения 5^x-y, если $(x;y)$ является решением системы уравнений $\begin{cases}2\cdot5^x+5y=10\\3\cdot5^x-10y=155\end{cases}$.

В5. Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-5;5)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите число точек графика функции $y=f(x)$, в которых касательные к графику параллельны оси абсцисс или совпадают с ней.



B6. Упростите выражение $\dfrac{1}{5(\sqrt{x}-1)}\sqrt[4]{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x^3}-3x+3\sqrt{x}-1)}$ и найдите его значение при $x = 0{,}2007$.

B7. Найдите наибольший корень уравнения
$\log_4(x+3)^2 - 3\log_4|x+3| = \log_4(x+3)^4 + 9$.

B8. Периодическая функция $y = f(x)$ с периодом, равным 3, определена на множестве всех действительных чисел. Известно, что на промежутке $(-1;\ 2]$ она совпадает с функцией $y = -x^2 - 4$. Найдите значение выражения $f(-10)\cdot f(20) - f(0)$.

B9*. Из пункта A в пункт B выехал автомобиль. В тот момент, когда он проехал 20% расстояния между пунктами, следом за ним выехал мотоциклист. Через час мотоциклист догнал автомобиль и повернул обратно. Автомобиль прибыл в пункт B в тот момент, когда мотоциклист вернулся в пункта A. Через сколько минут после выезда автомобиля выехал мотоциклист?

B10*. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8, а сторона основания равна $4\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости A_1BC.

B11*. Высота BH, проведенная к основанию равнобедренного треугольника ABC, пересекает биссектрису угла A в точке M и равна 8. Найдите MH, если площадь треугольника ABC равна 48.

Для записи ответов на задания С1 и С2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1. Найдите значение функции $f(x) = 25^{\log_{\frac{1}{25}}\frac{x+5}{x^2-15x}+\log_{25}(x+5)}$ в точке максимума.

C2. Решите уравнение $\cos 4x \cdot \sin 5x - 1 = 0$.

Часть 3

Для записи ответов на задания (С3–С5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

С3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\left(\frac{6}{5}\cos 20°\right)^{x^2+ax-12} \le 1$ верно для любого значения переменной $x \in [-6; 2]$.

С4*. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$; $BC = 2\sqrt{2}$. Точка K – середина ребра CC_1, $B_1K \perp A_1B$. Найдите тангенс угла между прямой A_1B и плоскостью основания призмы.

С5. Решите неравенство $\left|\left|2^{x^2-4x}-\frac{1}{8}\right|-\left|\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\right|\right| \ge \left|2^{x^2-4x}+\log_2(x-2)-\frac{1}{8}\right|$.

Решение варианта

Часть 1

А1. Учитывая, что при делении степеней показатели степени вычитаются, получаем: $\frac{5^{-0,5}}{5^{-3,5}} = 5^{-0,5-(-3,5)} = 5^3 = 125.$

Правильный ответ: 3.

А2. Используем свойства корней и в подкоренных выражениях выделим множитель, кратный 7. Получаем: $\frac{\sqrt[3]{784}\cdot\sqrt[3]{28}}{7} = \frac{\sqrt[3]{49\cdot16}\cdot\sqrt[3]{7\cdot4}}{7} =$

$= \frac{\sqrt[3]{49\cdot16\cdot7\cdot4}}{7} = \frac{\sqrt[3]{7^3\cdot4^3}}{7} = \frac{7\cdot4}{7} = 4$.

Правильный ответ: 1.

А3. Учтем свойства логарифмов и в данном выражении выделим член, содержащий данную величину: $\log_9 b = 0,3$. Имеем: $\log_9\frac{b^6}{729} =$

$= \log_9 b^6 - \log_9 729 = 6\log_9 b - \log_9 9^3 = 6\log_9 b - 3 = 6\cdot0,3-3 = -1,2.$

Правильный ответ: 2.

А4. Необходимо учесть простейшие свойства функции $y = \log_2 x$. Эта функция возрастающая, поэтому варианты 1 и 2 отпадают. Такая функция определена только при $x > 0$ и вариант 3 не подходит. Остается график 4.

Правильный ответ: 4.

А5. Используем правило нахождения производной для произведения функций. Поэтому производная функции $y=(9-x)\ln x$ равна $y'=(9-x)'\cdot\ln x+(9-x)\cdot(\ln x)'=-\ln x+(9-x)\cdot\dfrac{1}{x}=-\ln x+\dfrac{9-x}{x}$.

Правильный ответ: 2.

А6. Учтем ограниченность функции косинус. Получаем очевидные неравенства: $-1\le\cos 6x\le 1$, $1\ge-\cos 6x\ge-1$, $1-18\ge-\cos 6x-18\ge-1-18$, т. е. $-17\ge y\ge-19$. Поэтому множество значений данной функции $E(y)=[-19;-17]$.

Правильный ответ: 4.

А7. Так как выполняется неравенство $f(x)\le g(x)$, то график функции $f(x)$ должен располагаться ниже графика $g(x)$. Из рисунка видно, что это имеет место при $x\in[-2;3]$.

Правильный ответ: 4.

А8. Область определения функции $f(x)=\dfrac{52}{\sqrt[10]{2-\log_3 x}}$ задается неравенствами $\begin{cases}x>0\\2-\log_3 x>0\end{cases}$, или $\begin{cases}x>0\\2>\log_3 x\end{cases}$, или $\begin{cases}x>0\\9>x\end{cases}$, откуда область определения $D(f)=(0;9)$.

Правильный ответ: 1.

А9. Данное неравенство $\log_{\frac{3}{2}}(5-x)\le\log_{\frac{3}{2}}(3x-11)$ равносильно системе линейных неравенств $\begin{cases}5-x>0\\5-x\le 3x-11\end{cases}$, или $\begin{cases}5>x\\16\le 4x\end{cases}$, или $\begin{cases}x<5\\4\le x\end{cases}$, откуда $x\in[4;5)$.

Правильный ответ: 2.

А10. Уравнение $\sqrt{2}-2\cos\dfrac{x}{12}=0$ запишем в виде $\cos\dfrac{x}{12}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Решения этого уравнения $\dfrac{x}{12}=\pm\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2\pi n=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n(n\in Z)$, откуда $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+24\pi n$.

Правильный ответ: 1.

В1. При решении уравнения $3\cdot 10^{\lg x}=x+10$ учтем основное логарифмическое тождество и получим $3x=x+10$. Корень этого уравнения $x=5$.

Ответ: 5.

B2. Упростим выражение $10\sin(2\pi-\alpha)-7\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)$. Используем формулы приведения и получим: $-10\sin\alpha-7\sin\alpha=-17\sin\alpha$. При $\sin\alpha=-0{,}2$ получаем: $-17\cdot(-0{,}2)=3{,}4$.

Ответ: 3,4.

B3. Для решения данного уравнения перенесем все члены в левую часть и разложим ее на множители: $x\sqrt{3x-x^2}+\sqrt{3x-x^2}=0$, или $\sqrt{3x-x^2}\,(x+1)=0$, или $\sqrt{x(3-x)}\,(x+1)=0$. Корни этого уравнения $x=0$ и $x=3$ (при $x=-1$ подкоренное выражение отрицательно). Наименьший корень $x=0$.

Ответ: 0.

Часть 2

B4. По условию система уравнений решение имеет. Почленно сложим эти уравнения: $5\cdot5^x-5y=165$, откуда $5^x-y=33$.

Ответ: 33.

B5. Касательные к графику функции параллельны оси абсцисс только в точках экстремума (минимума или максимума). Видно, что таких точек 4.

Ответ: 4.

B6. Используя формулу куба разности и свойства корней, упростим данное выражение: $\frac{1}{5(\sqrt{x}-1)}\cdot\sqrt[4]{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x^3}-3x+3\sqrt{x}-1)}=$

$$=\frac{1}{5(\sqrt{x}-1)}\cdot\sqrt[4]{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)^3}=\frac{1}{5(\sqrt{x}-1)}\sqrt[4]{(\sqrt{x}-1)^4}=\frac{|\sqrt{x}-1|}{5(\sqrt{x}-1)}=$$

$=\frac{-(\sqrt{x}-1)}{5(\sqrt{x}-1)}=-\frac{1}{5}=-0{,}2.$ Учтено, что $x=0{,}2007<1$, поэтому $\sqrt{x}-1<0$ и $\left|\sqrt{x}-1\right|=-(\sqrt{x}-1)$.

Ответ: –0,2.

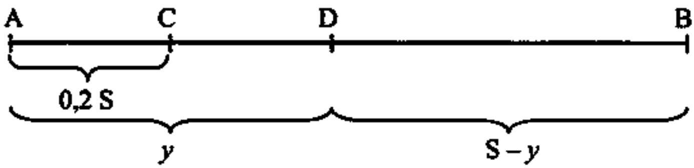
B7. Используем свойства логарифмов и запишем уравнение в виде $2\log_4|x+3|-3\log_4|x+3|=8\log_4|x+3|+9$, откуда $-9\log_4|x+3|=9$ и $\log_4|x+3|=-1$. Тогда получаем: $|x+3|=4^{-1}=0{,}25$, или $x+3=\pm0{,}25$, или $x=-3\pm0{,}25$. Наибольший корень $x=-3+0{,}25=-2{,}75$.

Ответ: –2,75.

B8. Так как период функции $y=f(x)$ равен $T=3$, то приведем все аргументы функций к заданному промежутку $(-1;\ 2]$. Получаем: $f(-10)\cdot f(20)-f(0)=f(-10+4T)\cdot f(20-6T)-f(0)=$ $=f(-10+12)\cdot f(20-18)-f(0)=f^2(2)-f(0)$. Найдем значения: $f(2)=-2^2-4=-8$ и $f(0)=-0^2-4=-4$. Тогда значение выражения $f^2(2)-f(0)=(-8)^2-(-4)=68$.

Ответ: 68.

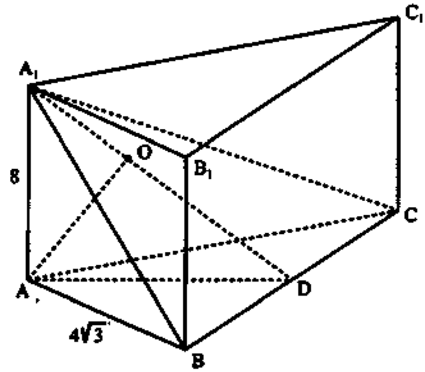
B9*. Пусть скорость автомобиля x (км/ч), мотоцикла y (км/ч) и расстояние AB равно S (км). Автомобиль находился в точке C, когда выехал мотоцикл. По условию $AC = 0,2S$. Встреча автомобиля и мотоцикла произошла в точке D. Так как мотоцикл до встречи ехал 1 ч, то $AD = y$. Надо найти время $t=\frac{0,2S}{x}$, через которое после выезда автомобиля выехал мотоцикл.



Опишем условия задачи. К началу движения мотоцикла расстояние между объектами $AC = 0,2S$. Поэтому время до их встречи $\frac{0,2S}{y-x}=1$ (объекты движутся в одном направлении). Теперь рассмотрим события после встречи. Мотоцикл возвращается в A и тратит на это 1 ч. Автомобиль, чтобы попасть в B, тратит такое же время. Получаем уравнение $\frac{S-y}{x}=1$. Запишем уравнения в виде $\begin{cases}0,2S=y-x\\ S-y=x\end{cases}$ или $\begin{cases}0,2S+x=y\\ S-x=y\end{cases}$. Приравняем левые части этих уравнений: $0,2S+x=S-x$ или $2x=0,8S$, откуда $x=0,4S$. Теперь найдем требуемое время: $t=\frac{0,2S}{x}=\frac{0,2S}{0,4S}=\frac{1}{2}$ ч $=30$ мин.

Ответ: 30 мин.

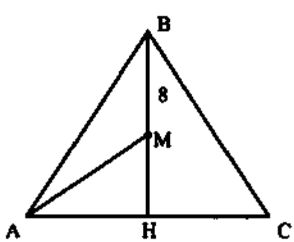
B10*. Проведем высоты в треугольниках ABC, BA_1C и AA_1D. Тогда отрезок AO – расстояние от вершины A до плоскости A_1BC (для обоснования достаточно применить теорему о трех перпендикулярах, что рекомендуем сделать самостоятельно).



Из прямоугольного ΔABD найдем $AD = AB \cdot \cos 30° = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6.$ Определим гипотенузу A_1D в прямоугольном ΔA_1AD по теореме Пифагора: $A_1D = \sqrt{A_1A^2 + AD^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Найдем площадь прямоугольного ΔA_1AD. Она равна $S = \frac{1}{2} A_1A \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$. С другой стороны, эта же площадь $S = \frac{1}{2} A_1D \cdot AO = 5AO$. Приравняем эти величины и получим уравнение $24 = 5AO$, откуда $AO = 4{,}8$.

Ответ: 4,8.

B11*. Найдем основание AC в ΔABC, зная его площадь: $48 = \frac{1}{2} AC \cdot BH$ или $48 = \frac{1}{2} AC \cdot 8$, откуда $AC = 12$, тогда $AH = 6$. По теореме Пифагора из прямоугольного ΔABH вычислим: $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Для нахождения MH используем теорему о биссектрисе в ΔABH. Получаем: $\frac{MH}{BM} = \frac{AH}{AB}$ или $\frac{MH}{8 - MH} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, откуда $5MH = 24 - 3MH$ и $MH = 3$.

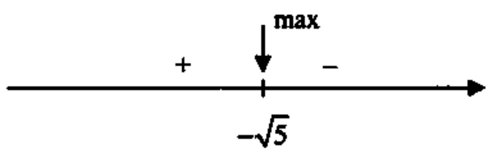


Ответ: 3.

C1. Используем основное логарифмическое тождество и упростим функцию $f(x)=25^{\log_{\frac{1}{25}}\frac{x+5}{x^3-15x}+\log_{25}(x+5)}=\left(\frac{1}{25}\right)^{-\log_{\frac{1}{25}}\frac{x+5}{x^3-15x}}\cdot 25^{\log_{25}(x+5)}=$

$=\frac{x^3-15x}{x+5}\cdot(x+5)=x^3-15x$. Область определения функции задается неравенствами $\begin{cases}x+5>0\\ x^3-15x>0\end{cases}$. Решение этой системы $x\in(-\sqrt{15};\,0)\cup(\sqrt{15};\,\infty)$.

Найдем производную функции $f(x)=x^3-15x$ и получим: $f'(x)=3x^2-15=3(x^2-5)$. В область определения функции попадает только точка $x=-\sqrt{5}$, и в этой точке функция имеет максимум. Его значение $f_{\max}=f(-\sqrt{5})=(-\sqrt{5})^3-15(-\sqrt{5})=-5\sqrt{5}+15\sqrt{5}=10\sqrt{5}$.



Ответ: $10\sqrt{5}$.

C2. Запишем данное уравнение в виде $\cos 4x\cdot\sin 5x=1$. С учетом ограниченности функций косинус и синус получаем, что такое равенство возможно только в двух случаях:

а) $\begin{cases}\cos 4x=1\\ \sin 5x=1\end{cases}$, тогда $\begin{cases}4x=2\pi n\\ 5x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\end{cases}$, откуда $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}n\\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}k\end{cases}$ (где $n,\,k\in Z$). Так как нас интересует решение системы (те x, которые удовлетворяют двум уравнениям), то приравняем выражения для x. Получаем: $\frac{\pi}{2}n=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}k$, или $5n = 1 + 4k$, или $k=\frac{5n-1}{4}$. Число n и k должны быть целыми. Это возможно только при $n = 1 + 4m$ (где $m\in Z$). Тогда $x=\frac{\pi}{2}n=\frac{\pi}{2}(1+4m)=\frac{\pi}{2}+2\pi m$.

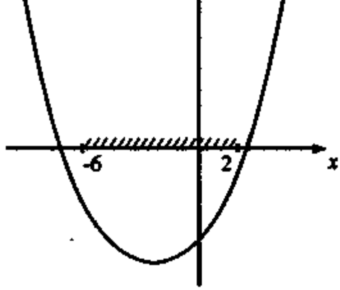
б) $\begin{cases}\cos 4x = -1\\ \sin 5x = -1\end{cases}$, тогда $\begin{cases}4x = \pi + 2\pi n\\ 5x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\end{cases}$, откуда $\begin{cases}x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} n\\ x = -\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi}{5} k\end{cases}$

(где n, $k \in Z$). Далее решаем аналогично предыдущему случаю. Приравняв выражения для x, получим: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} n = -\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi}{5} k$, или $5 + 10n = -2 + 4k$, или $7 = 2(2k - 5n)$. Очевидно, что такое равенство при целых k и n не выполняется, так как слева стоит нечетное число, справа – четное. Поэтому данная система уравнений решений не имеет.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$ ($n \in Z$).

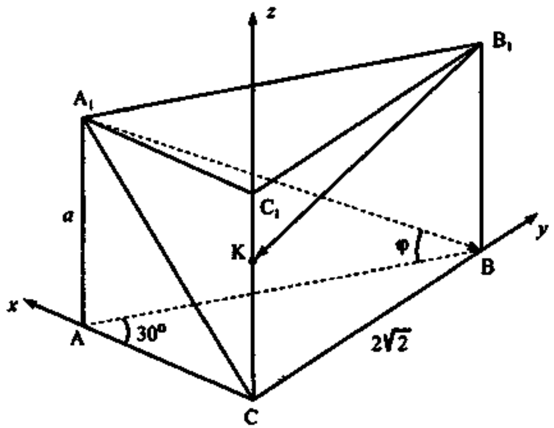
Часть 3

С3. Прежде всего покажем, что основание степени $\dfrac{6}{5}\cos 20^\circ > 1$. Действительно, $\cos 20^\circ > \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\dfrac{6}{5}\cos 20^\circ > \dfrac{6}{5} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{5} = \dfrac{\sqrt{27}}{5} > 1$. Поэтому данное неравенство равносильно неравенству $x^2 + ax - 12 \le 0$, которое должно выполняться при всех $x \in [-6; 2]$. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + ax - 12$. Ее графиком является парабола, направленная ветвями вверх. Очевидно, что неравенство $f(x) \le 0$ будет выполняться при всех $x \in [-6; 2]$, если выполнены неравенства $\begin{cases}f(-6) \le 0\\ f(2) \le 0\end{cases}$, или $\begin{cases}36 - 6a - 12 \le 0\\ 4 + 2a - 12 \le 0\end{cases}$, или $\begin{cases}4 \le a\\ a \le 4\end{cases}$. Решение этой системы $a = 4$.



Ответ: 4.

C4*.



Из прямоугольного ΔABC найдем: $AB=\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=4\sqrt{2}$. Так как призма прямая, то угол между прямой A_1B и плоскостью основания равен углу между прямой A_1B и ее проекцией AB на плоскость, т. е. $\angle A_1BA=\varphi$. Для нахождения $\operatorname{tg}\varphi$ надо знать боковое ребро $AA_1=a$.

Используем метод координат и операции с векторами. Система координат введена на рисунке. Надо записать условие перпендикулярности скрещивающихся прямых A_1B и B_1K или векторов $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{B_1K}$. Для этого надо задать их координаты или координаты точек A_1, B, B_1, K. Так как $AC=BC\cdot\operatorname{ctg}A=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{6}$, то сразу получаем: $A_1(2\sqrt{6};\,0;\,a)$, $b(0;\,2\sqrt{2};\,0)$, $B_1(0;\,2\sqrt{2};\,a)$, $K\left(0;\,0;\,\dfrac{a}{2}\right)$. Теперь запишем координаты векторов $\overrightarrow{A_1B}(-2\sqrt{6};\,2\sqrt{2};\,-a)$ и $\overrightarrow{B_1K}\left(0;\,-2\sqrt{2};\,-\dfrac{a}{2}\right)$. Так как эти векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $-2\sqrt{6}\cdot 0+2\sqrt{2}(-2\sqrt{2})-a\cdot\left(-\dfrac{a}{2}\right)=0$ или $-8+\dfrac{a^2}{2}=0$, откуда $a=4$. Определим $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{A_1A}{AB}=\dfrac{4}{4\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}=0{,}5\sqrt{2}$.

Ответ: $0{,}5\sqrt{2}$.

C5. Запишем неравенство в виде $\left||2^{x^2-4x}-2^{-3}|-|\log_2(x-2)|\right| \geq$ $\geq \left|(2^{x^2-4x}-2^{-3})+\log_2(x-2)\right|$. Разумеется, решить сразу это неравенство нельзя. Поэтому введем обозначения $a=2^{x^2-4x}-2^{-3}$ и $b=\log_2(x-2)$ (где $x>2$). Тогда неравенство имеет вид $\left||a|-|b|\right| \geq |a+b|$, и надо получить более простую связь между a и b. Так как обе части неравенства неотрицательны, то возведем их в квадрат (при этом знак неравенства сохраняется). Получаем: $(|a|-|b|)^2 \geq (a+b)^2$, или $(|a|-|b|)^2-(a+b)^2 \geq 0$, или $(|a|-|b|+a+b)(|a|-|b|-a-b) \geq 0$. Теперь надо раскрыть модули в этом неравенстве, рассмотрев 4 случая.

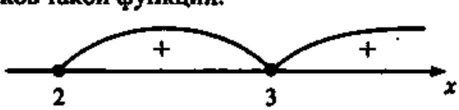
1) При $a \geq 0$ и $b \geq 0$ получаем: $(a-b+a+b)(a-b-a-b) \geq 0$ или $-4ab \geq 0$. Это возможно только при $a=0$ или $b=0$.

2) При $a \geq 0$ и $b<0$ имеем: $(a+b+a+b)(a+b-a-b) \geq 0$ или $0 \geq 0$. Решение этого неравенства $a \geq 0$ и $b<0$.

3) При $a<0$ и $b \geq 0$ получаем: $(-a-b+a+b)(-a-b-a-b) \geq 0$ или $0 \geq 0$. Решение $a<0$ и $b \geq 0$.

4) При $a<0$ и $b<0$ имеем: $(-a+b+a+b)(-a+b-a-b) \geq 0$ или $-4ab \geq 0$. Это неравенство решений не имеет.

Очевидно, что случаи 1–4 приводят к условию $ab \leq 0$ или $(2^{x^2-4x}-2^{-3})\log_2(x-2) \leq 0$. Функция, стоящая в левой части, непрерывна (как произведение непрерывных функций) при $x>2$. Эта функция имеет только один нуль второй кратности $x=3$. построим диаграмму знаков такой функции.



Видно, что решением неравенства является единственное число $x=3$.

Ответ: 3.

Литература

1. *Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д.* Математика для техникумов на базе средней школы. – М.: Наука, 1990.

2. *Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И.* Алгебра и математический анализ для 10–11 классов для учащихся школ и классов с углубл. изуч. математики. – М.: Просвещение, 1995.

3. *Глазков Ю.А., Корешкова Т.А., Мирошин В.В. и др.* Математика. ЕГЭ: Методическое пособие для подготовки. – М.: Экзамен, 2007.

4. *Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В. и др.* Сборник конкурсных задач по математике. – М.: Наука, 1983.

5. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Астрель, 2002.

6. *Дорофеев Г.В., Седова Е.А., Шестаков С.А.* ЕГЭ. Суперрепетитор. – М.: ЭКСМО, 2007.

7. *Егерев В.К., Зайцев В.В., Кордемский Б.А. и др.* Сборник задач по математике для поступающих во втузы. / Под ред. М.И. Сканави. – М.: Высшая школа, 1992.

8. *Зеленский А.С., Василенко О.Н.* Сборник задач вступительных экзаменов по математике. – М.: НТЦ «Университетский», 2001.

9. *Иванов А.С., Майоров Ю.К., Рурукин А.Н.* Сборник задач по тригонометрии и началам анализа. – М.: МИФИ, 1991.

10. *Ивлев Б.М., Саакян С.М., Шварцбурд С.И.* Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 11 класса. – М.: Просвещение, 2005.

11. *Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П. и др.* Алгебра и начала анализа: Учебник для 10–11 классов. – М.: Просвещение, 2001.

12. *Кочагин В.В., Бойченко Е.М., Глазков Ю.А. и др.* Математика: реальные варианты: ЕГЭ 2007–2008. – М.: Астрель, 2007.

13. *Минорский В.П.* Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1994.

14. *Мирошин Н.В., Баскаков А.В., Михайлов П.А. и др.* Математика: Сборник задач с решениями для поступающих в вузы. – М.: Астрель, 2002.

15. *Мочалов В.В., Сильвестров В.В.* Уравнения и неравенства с параметрами. – Чебоксары: Изд. Чувашского университета, 2000.

16. *Нечаев М.П.* Уроки по курсу «Алгебра–11». – М.: 5 за знания, 2007.

17. *Рурукин А.Н.* Поурочные разработки по алгебре и началам анализа: 10 класс. – М.: ВАКО, 2008.

18. *Рурукин А.Н.* Пособие для интенсивной подготовки к экзамену по математике. Выпускной, вступительный, ЕГЭ на 5+. – М.: ВАКО, 2006.

19. *Рурукин А.Н.* ЕГЭ. Математика: Пособие для подготовки. Подробный разбор заданий 2002–2004. М.: ВАКО, 2004.

20. *Севрюков П.Ф.* Школа решения задач с параметрами. – М.: Илекса, 2007.

21. *Шарыгин И.Ф.* Решение задач для 10–11 классов. – М.: Просвещение, 1994.

22. *Шестаков С.А., Высоцкий И.Р., Звавич Л.И. и др.* Алгебра и начала анализа: Сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы. – М.: МИОО, МЦНМО, 2002.

23. *Шестаков С.А.* Экзаменационные работы для проведения итоговой аттестации по алгебре и началам анализа за курс средней школы. – М.: МИОО. 2004.

Оглавление

Учебно-методическое издание

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

Рурукин Александр Николаевич
Бровкова Елена Владимировна
Лупенко Геннадий Викторович
Пыжова Татьяна Анатольевна

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

к УМК А.Н. Колмогорова и др. (М.: Просвещение)

11 класс

Дизайн обложки *Амгалана Ринчинова*

По вопросам приобретения книг издательства «ВАКО»
обращаться в ООО «Образовательный проект»
по телефонам: 8 (495) 778-58-27, 746-15-04. Сайт: www.obrazpro.ru

Приглашаем к сотрудничеству авторов.
Телефон: 8 (495) 507-33-42. Сайт: www.vaco.ru

Налоговая льгота –
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»
Подписано к печати с диапозитивов 14.01.2009.
Формат 84×108/32. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. листов 16,8. Тираж 10 000 экз. Заказ № 113.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Дом печати — ВЯТКА».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.